B452D

ThS. NGUYỄN TRỌNG TUẤN (CHỦ BIÊN)
ThS. ĐẶNG PHÚC THANH - NGUYỄN TẤN SIÊNG
(Giáo viên chuyên toán và năng khiếu)

Bồi dưỡng học sinh giỏi

HÌNH HỌC 10

Dành cho học sinh khá, giỏi và chuyên Toán
Biên soạn theo chương trình mới

thành viên dịch vụ văn hóa KHANG VIỆT
Nhà sách KHANG VIỆT

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN
ĐVL 12799 13

NHÀ XUẤT BẢN TỔNG HỢP THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

Lời nói đầu

Cuốn sách *"Bồi dưỡng học sinh giỏi Hình học 10"* là một tài liệu tham khảo môn toán dùng trong trường trung học phổ thông, nhằm mục đích giúp cho học sinh rèn luyện các kỹ năng giải các dạng toán theo yêu cầu Chuẩn Kiến thức – Kỹ năng của chương trình, trên cơ sở đó tài liệu còn giúp cho các em tiếp cận, giải các đề thi Đại học, Cao đẳng và các bài toán nâng cao dành cho các học sinh khá - giỏi.

Nội dung cuốn sách gồm 3 chương, tuần tự theo sách giáo khoa Hình học 10 hiện hành. Mỗi chương gồm các chuyên đề tương ứng với các bài học (§) được trình bày theo cấu trúc sau

A. Tóm tắt lí thuyết.

B. Một số dạng toán.

C. Luyện tập.

Cuối mỗi chương là phần các bài tập ôn cuối chương bao gồm các bài tập tổng hợp kiến thức trong chương.

Trong hai phần *B. Một số dạng toán* và *C. Luyện tập*, các bài tập được trình bày theo từng dạng, từ đơn giản đến phức tạp, ngoài các bài theo dạng Chuẩn Kiến thức – Kỹ năng, chúng tôi đã trình bày thêm các bài tập mới, dạng khó, phức tạp phục vụ cho đối tượng học sinh khá - giỏi nhằm phát huy khả năng tư duy linh hoạt, sáng tạo, độc lập ở mỗi em.

Để học tốt tài liệu này, học sinh cần nắm vững lí thuyết, các dạng toán và các bài tập có lời giải mẫu. Với tinh thần tự học một cách nghiêm túc, khoa học, chúng tôi hi vọng rằng tài liệu này có thể giúp cho các em cải thiện được năng lực học toán của bản thân và vươn lên trình độ khá, giỏi.

Dù đã cố gắng rất nhiều, nhưng thiếu sót là điều khó tránh khỏi, rất mong các thầy, cô giáo và các em học sinh góp ý để cuốn sách này được điều chỉnh, bổ sung, hoàn thiện hơn trong lần tái bản.

Các tác giả

Nhà sách Khang Việt xin trân trọng giới thiệu tới Quý độc giả và xin lắng nghe mọi ý kiến đóng góp, để cuốn sách ngày càng hay hơn, bổ ích hơn.

Thư xin gửi về:

Cty TNHH Một Thành Viên – Dịch Vụ Văn Hóa Khang Việt.
71, Đinh Tiên Hoàng, P. Đakao. Quận 1, TP. HCM
Tel: (08) 39115694 – 39111969 – 3911968 – 39105797 – Fax: (08) 39110880
Hoặc Email: khangvietbookstore@yahoo.com.vn

Chương 1

VECTƠ

§1. KHÁI NIỆM VECTƠ

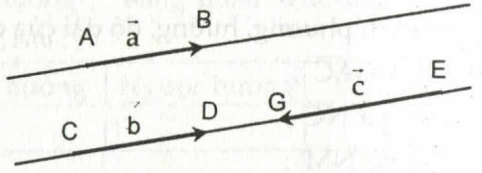
A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa

- Vectơ là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là trong hai điểm mút của đoạn thẳng, đã chỉ rõ điểm nào là điểm đầu, điểm nào là điểm cuối.
- Kí hiệu vectơ có M là điểm đầu và N là điểm cuối là $\overrightarrow{MN}$. Nhiều khi người ta dùng kí hiệu $\vec{a}$ để chỉ một vectơ $\overrightarrow{AB}$ nào đó.
- Vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau được gọi là vectơ - không, kí hiệu là $\vec{0}$.

2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng

- Giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$: Cho $\overrightarrow{AB}$ khác $\vec{0}$.
  Đường thẳng AB được gọi là giá của $\overrightarrow{AB}$.



- Hai vectơ cùng phương: Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- Nếu hai vectơ cùng phương thì hoặc chúng cùng hướng, hoặc chúng ngược hướng.

  Chú ý. Vectơ - không $\overrightarrow{AA}$ có giá là mọi đường thẳng qua A; $\vec{0}$ cùng phương và cùng hướng với mọi vectơ.

* Trên hình vẽ ta có các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EG}$ cùng phương với nhau, trong đó $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ cùng hướng, $\overrightarrow{EG}$ ngược hướng với các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$.

3. Hai vectơ bằng nhau

- Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$: Độ dài của đoạn thẳng AB được gọi là độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$, kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$.
- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, ta viết $\vec{a} = \vec{b}$.

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 1. So sánh các vectơ

Sử dụng các định nghĩa về hai vectơ cùng phương, cùng hướng, bằng nhau

Bài 1. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai ?

a) Nếu AB = AC thì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$;

b) Nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$ thì $B\equiv D$;

c) Nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ thì B là trung điểm đoạn AC;

d) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$.

Giải.

a) Sai vì hai vectơ bằng nhau không những có độ dài bằng nhau mà còn phải cùng hướng.

b) Đúng.

c) Đúng vì nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ thì $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ cùng hướng và AB = AC. Suy ra A,B,C thẳng hàng theo thứ tự đó và AB = AC. Vậy B là trung điểm đoạn AC.

d) Sai vì với A, B phân biệt thì các vectơ này ngược hướng.

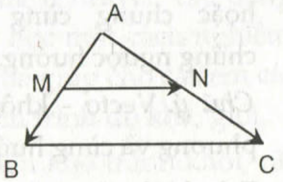
Bài 2. Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Hãy so sánh phương, hướng, độ dài của các cặp vectơ

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$;
b) $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{MN}$;

c) $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{NC}$;
d) $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$;

e) $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{NM}$;
g) $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{NC}$.

Giải



a) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương;

b) Hai vectơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng và $|\overrightarrow{BC}|=2|\overrightarrow{MN}|$;

c) Hai vectơ $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{NC}$ bằng nhau;

d) Hai vectơ $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ cùng phương, ngược hướng và cùng độ dài;

e) Hai vectơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{NM}$ cùng phương, ngược hướng và $|\overrightarrow{BC}|=2|\overrightarrow{NM}|$;

g) Hai vectơ $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{NC}$ cùng phương, ngược hướng và $|\overrightarrow{CA}|=2|\overrightarrow{NC}|$.

Dạng 2. Xác định điểm thoả mãn hệ thức vectơ

Bài 3. Cho hai điểm A và B phân biệt. Hãy tìm điểm M sao cho:

a) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$;
b) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BM}$.

Giải.

a) M là trung điểm đoạn AB.

b) M là điểm đối xứng của A qua B.

Bài 4. Cho tam giác ABC. Hãy xác định các điểm D và E sao cho

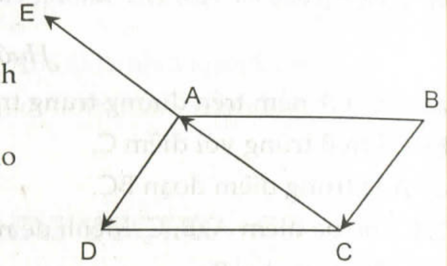
$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CA}.$$

Giải.

Ta có

- $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow D$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành ABCD.
- $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CA}\Leftrightarrow E$ là điểm trên tia CA sao cho CA = AE.

(Hình vẽ).



C. LUYỆN TẬP

1.1. Cho hai điểm A, B phân biệt. Hãy so sánh phương, hướng, độ dài của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$.

Hướng dẫn giải

Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$ cùng phương, ngược hướng và cùng độ dài.

1.2. Cho hình thang ABCD với AB // CD và CD = 2AB. Gọi M là trung điểm CD, N là trung điểm BC. Hãy điền dấu "x" vào các cột ứng với các từ "cùng phương", "cùng hướng", "ngược hướng", "bằng nhau" để diễn tả mỗi quan hệ giữa các cặp vectơ vào bảng sau :

	Cùng phương	Cùng hướng	Ngược hướng	Bằng nhau
$\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$				
$\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BD}$				
$\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$				
$\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{BC}$				
$\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{DA}$				
$\overrightarrow{DM}$ và $\overrightarrow{BA}$				
$\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{DC}$				

Hướng dẫn giải

a) Vectơ $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{DE}$.

b) Vectơ $\overrightarrow{BF}$ ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{ED}$.

c) Vectơ $\overrightarrow{AE}$ bằng vectơ $\overrightarrow{FD}$.

d) Vectơ $\overrightarrow{DE}$ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{BA}$.

e) Vectơ $\overrightarrow{FE}$ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{BC}$.

g) Vectơ $\overrightarrow{BD}$ bằng vectơ $\overrightarrow{DC}$.

h) Vectơ $\overrightarrow{EC}$ không cùng phương với vectơ $\overrightarrow{BF}$.

1.3. Cho ba điểm A, B, C. Có nhận xét gì về ba điểm đó nếu :

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$;

c) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ và $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Hướng dẫn giải

a) Điểm A nằm trên đường trung trực đoạn BC.

b) Điểm B trùng với điểm C.

c) A là trung điểm đoạn BC.

1.4. Cho ba điểm A, B, C. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A \equiv B$; b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow A \equiv C$ và $B \equiv D$;

c) Nếu $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ thì $B \equiv C$; d) Nếu $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$ thì $B \equiv C$.

Hướng dẫn giải

a) đúng b) sai c) sai d) đúng.

1.5. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Kết luận gì về ba điểm A, B, C nếu :

a) Vectơ $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{BC}$;

b) Vectơ $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AC}$;

c) Vectơ $\overrightarrow{AB}$ bằng vectơ $\overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn giải

a) Ba điểm A, B, C thẳng hàng.

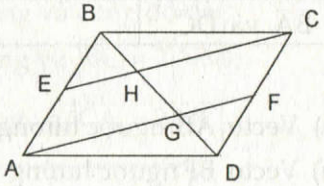
b) Ba điểm A, B, C thẳng hàng và B, C nằm về cùng một phía đối với điểm A.

c) Hai điểm B, C trùng nhau.

1.6. Cho hình bình hành ABCD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD. Đường chéo BD cắt AF tại G và cắt CE tại H. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{HB}$; b) $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{GC}$.

Hướng dẫn giải



a) Ta có $DG = GH = HB = \frac{1}{3}BD$.

Dễ thấy các vectơ $\overrightarrow{DG}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{HB}$ cùng hướng.

Vậy $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{HB}$.

b) Tứ giác AEFC có AE = FC và AE // FC nên là hình bình hành.

Do đó AF // EC.

Mặt khác, $\Delta ADG = \Delta CBH \Rightarrow AG = CH$.

Như thế AGCH là hình bình hành. Từ đó $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{GC}$.

Chú ý: ABCD là hình bình hành ⇔ A,B,C không thẳng hàng và $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

1.7. Cho tứ giác lồi ABCD. Có kết luận gì về tứ giác ABCD nếu

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ và } |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|.$$

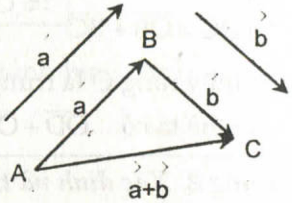
Hướng dẫn giải

1.7. Vì ABCD là tứ giác lồi và $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nên ABCD là hình bình hành.

Hơn nữa từ điều kiện còn lại ta thấy hình bình hành này có hai cạnh liên tiếp bằng nhau. Vậy ABCD là hình thoi.

§2. TỔNG CỦA HAI VECTƠ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT



1. *Định nghĩa*.

- Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

  Từ một điểm A bất kì dựng các vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

  Khi đó vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

  Kí hiệu $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

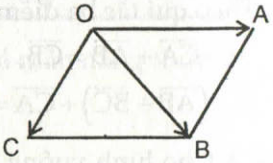
2. *Tính chất*

* $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$; * $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$; * $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

3. *Các quy tắc*

- Quy tắc ba điểm :

  Với ba điểm A, B, C tùy ý ta luôn có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



- Quy tắc hình bình hành :

  OABC là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$.
- Tính chất trung điểm :

  M là trung điểm đoạn AB $\Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
- Tính chất trọng tâm tam giác :

  G là trọng tâm của tam giác ABC $\Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 1. Chứng minh đẳng thức vectơ

Sử dụng qui tắc ba điểm và qui tắc hình bình hành.

Bài 5. Cho 4 điểm A, B, C, D tùy ý. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

Giải

Theo qui tắc ba điểm, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}$

Áp dụng tính chất giao hoán của phép cộng, ta có :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}.$$

Bài 6. Cho tứ giác ABCD. Gọi O là trung điểm của AB.
Chứng minh rằng $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

Giải.

Áp dụng qui tắc ba điểm, ta có

$$\begin{cases}\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$$

Chú ý rằng O là trung điểm AB nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$

Vì thế ta có $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$

Dạng 2. Xác định và tính độ dài của vectơ

- ***Dựa vào quy tắc ba điểm và các tính chất của tổng hai vectơ, ta rút gọn kết quả phép toán tổng các vectơ.***
- ***Khi tính độ dài vectơ ta thường xem độ dài đó là cạnh của một tam giác nào đó.***

Bài 7. Cho tam giác ABC. Xác định các vectơ

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA},\ \vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}.$$

Giải.

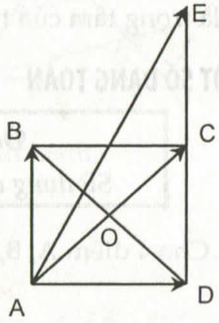
Theo qui tắc ba điểm, ta có :

$\vec{u}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$,

$\vec{v}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

Bài 8. Cho hình vuông ABCD tâm O, cạnh a. Hãy xác định và tính độ dài các vectơ: $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

Giải.



Trước hết ta có

$AC=BD=a\sqrt{2}$, $OA=OB=OC=OD=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

- Theo qui tắc hình bình hành, ta có
$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow\left|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=a\sqrt{2}$.
- Vì O là trung điểm AC nên
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}\Rightarrow\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right|=\left|\vec{0}\right|=0$.

- Theo qui tắc hình bình hành: $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OD}\Rightarrow\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}\right|=\left|\overrightarrow{OD}\right|=OD=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
- Dựng hình bình hành BACE. Khi đó
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AE}\right|=AE$.

Ta có tam giác ADE vuông tại D biết AD = a, DE = 2a.

Vậy $AE^2=AD^2+DE^2=5a^2\Rightarrow AE=a\sqrt{5}$.

Như vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=a\sqrt{5}$.

Dạng 3. Chứng minh tính chất hình học.

Bài 9. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng: ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi với mọi điểm M, ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

Giải

Áp dụng qui tắc ba điểm, ta có

$$\begin{cases}\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}\\ \overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC},\text{ với mọi M (*)}$$

Ta có: ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

Do đó từ (*) ta suy được:

ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$, với mọi điểm M.

Dạng 4. Tìm tập hợp điểm thoả mãn đẳng thức về tổng các vectơ

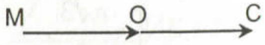
Bài 10. Cho đoạn thẳng AB. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn đẳng thức :

$$|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{AB}|.$$

Giải.

Áp dụng qui tắc ba điểm với O là trung điểm AB, ta có

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MO}$



Dựng vectơ $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{MO}$, ta có

$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MO}$ (hình vẽ).

Khi đó $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{AB}|\Leftrightarrow|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MO}|=|\overrightarrow{AB}|\Leftrightarrow|\overrightarrow{MC}|=|\overrightarrow{AB}|$

$$\Leftrightarrow MC=AB\Leftrightarrow 2MO=2OB\Leftrightarrow MO=OB.$$

M luôn cách điểm O cố định một khoảng không đổi OB nên tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O, bán kính R = OB.

C. LUYỆN TẬP

1.8. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai:

a) Nếu $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ thì $|\vec{a}| = |\vec{b}| + |\vec{c}|$;

b) Nếu I là trung điểm đoạn MN thì $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{NI} = \vec{0}$;

c) Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Hướng dẫn giải

a) Sai, chẳng hạn trong trường hợp $\vec{b}, \vec{c}$ không cùng phương.

b) Đúng. Nếu I là trung điểm đoạn MN thì $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{IN}$, do đó:

$$\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{NI} = \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{NI} = \vec{0}.$$

c) Đúng. Áp dụng qui tắc ba điểm ta có:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}.$$

1.9. Sử dụng qui tắc ba điểm để rút gọn các tổng vectơ sau đây:

a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EA}$;   b) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DF}$.

Hướng dẫn giải

a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EA} = (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{ED}$.

b) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$.

1.10. Cho tam giác ABC đều cạnh a.

a) Xác định và tính độ dài các vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}$.

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AC. Xác định và tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN}$.

Hướng dẫn giải

a) Dựng hình bình hành ABDC. Do tam giác ABC đều nên AD ⊥ BC.

Vậy $AD = 2AH = 2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Ta có $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$. Từ đó $|\vec{u}| = |\overrightarrow{AD}| = AD = a\sqrt{3}$.

b) $|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN}| = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

1.11. Cho 5 điểm A, B, C, D, E. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$;   b) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{ED}$.

Hướng dẫn giải

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$.

b) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{ED}$.

1.12. Cho 4 điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC trùng nhau.

Hướng dẫn giải

Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AD và BC. Khi đó

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID},\ \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{CJ}.$$

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{ID} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{JI} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \vec{0} \Leftrightarrow I \equiv J$.

1.13. Cho hình chữ nhật ABCD với AB = 2a, AD = a

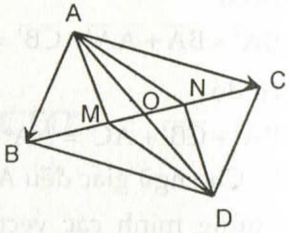
Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$, $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}|$, $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}|$.

Hướng dẫn giải

$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = a\sqrt{5}$, $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}| = 2a\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = 2a$.

1.14. Cho tam giác ABC. Gọi O là trung điểm đoạn BC. Các điểm M, N theo thứ tự đó nằm trên cạnh BC sao cho O là trung điểm đoạn MN. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$.

Hướng dẫn giải



Trước hết để ý rằng O là trung điểm của MN

Gọi D là điểm đối xứng của A qua O.

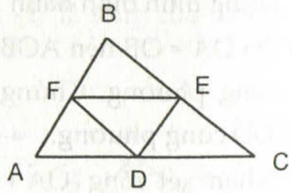
Khi đó các tứ giác ABDC và AMDN là hình bình hành. Do đó theo qui tắc hình bình hành $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD}$.

1.15. Cho tam giác ABC. Gọi D, E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA và AB. Chứng minh: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.

Hướng dẫn giải

- *Cách 1:* Ta có :

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF}$$
$$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AF}).$$



Dựa vào tính chất đường trung bình trong ΔABC, ta có $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{FE}$; $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DF}$; $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{ED}$.

Do đó $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF}$
$= \vec{0} + \overrightarrow{FF} = \vec{0}$ (đpcm)

- *Cách 2:* Ta có AFDE, BDEF, CEFD là các hình bình hành nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CE}$.

Do đó $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CE}$

$=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AE}$.

Vì D, E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA và AB nên:

$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BF}=\vec{0}$, $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CE}=\vec{0}$.

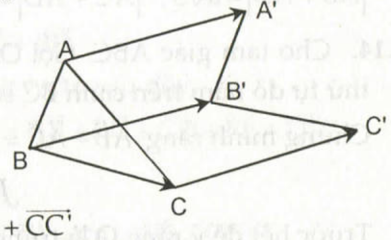
Vậy $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$.

1.16. Cho tam giác ABC. Từ các điểm A, B, C ta dựng các vectơ bằng nhau tùy ý $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}$. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{CA'}$;

b) $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{CB'}+\overrightarrow{AC'}$.

Hướng dẫn giải



a) Theo qui tắc hình bình hành, ta có

$\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}$

$=\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{CA'}$.

b) Ta có

$\overrightarrow{BA'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{CB'}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}$

Từ đó

$\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{CB'}+\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}$

1.17. Cho ngũ giác đều ABCDE có tâm O.

a) Chứng minh các vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ và $\vec{v}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}$ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{OD}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$.

Hướng dẫn giải

a) Trước hết chú ý rằng do tính chất đối xứng của ngũ giác đều nên $OD\perp AB$.

Dựng hình bình hành AOBF. Khi đó $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OF}$

Do OA = OB nên AOBF là hình thoi. Như thế $OF\perp AB$. Suy ra $\vec{u}=\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{OD}$ cùng phương. Chứng minh tương tự ta cũng có hai vectơ $\vec{v}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OD}$ cùng phương.

b) Nhận xét rằng $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$ là một vectơ cùng phương với $\overrightarrow{OD}$. Chứng minh tương tự ta cũng có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$ cùng phương với $\overrightarrow{OB}$ (vì vai trò hai vectơ $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}$ như nhau)

Vậy chỉ có thể tổng các vectơ trên là vectơ - không.

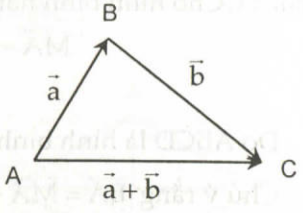
1.18. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$.

a) Chứng minh rằng $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$; dấu " = " xảy ra khi nào ?

b) Áp dụng : Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn điều kiện

$|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{AM}|+|\overrightarrow{MB}|$, với A, B là hai điểm cho trước.

Hướng dẫn giải



a) Từ một điểm A bất kì ta dựng $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, dựng $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$.

Khi đó $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$.

+ Nếu ABC là một tam giác ta có

$AC<AB+BC$, do đó $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$

+ Trong trường hợp A, B, C thẳng hàng thì

$AC<AB+BC$ khi $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng;

$AC=AB+BC$ khi $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Vậy $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$; dấu " = "xảy ra khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

b) Dựa vào kết quả câu a) ta thấy rằng

$|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{AM}|+|\overrightarrow{MB}|\Leftrightarrow|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AM}|+|\overrightarrow{MB}|$,

hay AB = AM + MB, điều này xảy ra khi và chỉ khi $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{MB}$ cùng hướng, hay M nằm trên đoạn thẳng AB.

Vậy tập hợp các điểm M là đoạn thẳng AB.

§3. HIỆU CỦA HAI VECTƠ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

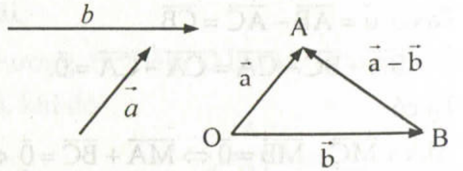
1. Vectơ đối của một vectơ

- Nếu $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$ thì ta nói $\vec{a}$ là vectơ đối của vectơ $\vec{b}$ và ngược lại.
- Vectơ đối của vectơ $\vec{a}$ (kí hiệu $-\vec{a}$) là một vectơ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ và có cùng độ dài với vectơ $\vec{a}$.

2. Hiệu của hai vectơ :

a) Định nghĩa: Hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}-\vec{b}$ là tổng của vectơ $\vec{a}$ với vectơ đối của vectơ $\vec{b}$.

$$\boxed{\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})}$$



b) Cách vẽ vectơ $\vec{a}-\vec{b}$:

Cho các vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ (như hình vẽ).

Từ điểm O bất kì, ta vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

Ta có $\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$.

c) Quy tắc về hiệu vectơ: Với ba điểm M, N, O tùy ý thì ta có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 1. Chứng minh đẳng thức vectơ

Sử dụng qui tắc ba điểm và qui tắc hình bình hành.

Bài 11. Cho hình bình hành ABCD và M là điểm tùy ý. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}.$$

Giải.

Do ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$. (1)

Chú ý rằng $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có đẳng thức cần chứng minh.

Bài 12. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F tùy ý. Chứng minh đẳng thức sau

$$\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CF}.$$

Giải.

Ta có $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}-\left(\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EB}\right)+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FD}$

$=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FD}$

$=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CF}.$

Vậy $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CF}.$

Dạng 2. Xác định và tính độ dài của vectơ

- *Rút gọn kết quả các phép toán tổng, hiệu các vectơ*
- *Khi tính độ dài vectơ ta thường xem độ dài đó là cạnh của một tam giác nào đó .*

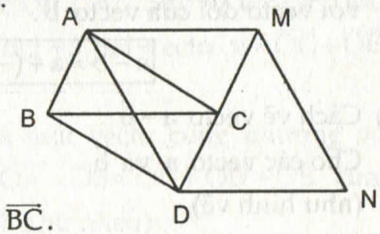
Bài 13. Cho tam giác ABC.

a) Hãy xác định các vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$, $\vec{v}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}$.

b) Xác định điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

c) Xác định điểm N sao cho $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}$.

Giải.



a) Ta có $\vec{u}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.

$\vec{v}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

b) Ta có

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}$.

Do đó M là đỉnh thứ tư của hình bình hành ABCM.

c) Gọi D là điểm đối xứng của A qua trung điểm của BC. Khi đó tứ giác ACDB là hình bình hành. Như thế $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

Vậy $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AM}$

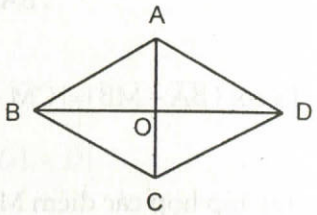
Vậy N là đỉnh thứ tư của hình bình hành ADNM.

Các điểm M, N được xác định như trên hình vẽ.

Bài 14. Cho hình thoi ABCD có tâm O, AB = a và $\widehat{ABC}=60^0$.

Xác định và tính độ dài các vectơ: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$.

Giải.



Theo quy tắc hình bình hành, ta có :

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. Do đó :

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=AC=a$ (vì ΔABC đều).

Theo quy tắc về hiệu của hai vectơ, ta có

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.

Vì ABCD là hình thoi có AB = a và

$\widehat{ABC}=60^0$ nên $BD=2BO=a\sqrt{3}$ (vì ΔABC là tam giác đều).

Vậy $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|=DB=a\sqrt{3}$.

Dạng 3. Chứng minh tính chất hình học

Bài 15. Cho tứ giác ABCD thoả mãn đồng thời các điều kiện sau đây :

i) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$; ii) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right|$.

Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình chữ nhật.

Giải.

Từ điều kiện i), ta thấy rằng ABCD là hình bình hành.

Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$

Do đó từ điều kiện ii), ta được $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{DB}\right|\Rightarrow AC=BD$.

Vì hình bình hành ABCD có hai đường chéo bằng nhau nên đó là hình chữ nhật.

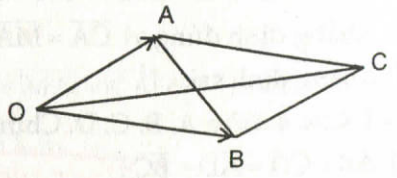
Bài 16. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Chứng minh rằng :

Nếu $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|$ thì vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có giá vuông góc với nhau.

Giải.

Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương, từ điểm O bất kì, ta vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Dựng hình bình hành OACB, khi đó

$\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$ và $\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}$.



Do đó $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|\Leftrightarrow AB=OC$

$\Leftrightarrow$ OACB là hình chữ nhật.

Suy ra $OA \perp OB$.

Vậy nếu $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có giá vuông góc với nhau.

Dạng 4. Tìm tập hợp điểm thoả mãn đẳng thức về hiệu các vectơ

Bài 17. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn đẳng thức:

$$|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CB}|.$$

Giải

Ta có: $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CB}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{BM}|$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{BM}| \Leftrightarrow MA = MB.$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực đoạn thẳng AB.

C. LUYỆN TẬP

1.19. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

a) Hai vectơ đối nhau có độ dài bằng nhau.

b) Nếu hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ đối nhau thì $A \equiv C$.

c) Hai vectơ đối nhau thì cùng phương.

d) Vectơ đối của vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ là vectơ $\vec{a} + \vec{b}$.

Hướng dẫn giải

a) Đúng vì hai vectơ đối nhau có độ dài bằng nhau.

b) Sai vì khi đó A là trung điểm BC.

c) Đúng vì giá của chúng trùng nhau.

d) Sai vì vectơ đối của $\vec{a} - \vec{b}$ là $-\vec{a} + \vec{b}$.

1.20. Cho tam giác ABC và điểm M tùy ý. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

a) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$

b) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MC}$

c) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{BC}$

d) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.

Hướng dẫn giải

a) Khẳng định đúng.

b) Khẳng định sai vì

$\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CM}$ (sai).

c) Khẳng định đúng vì $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{BC}$.

d) Khẳng định sai.

1.21. Cho 4 điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$;

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.

Hướng dẫn giải

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$.

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.

1.22. Cho tứ giác ABCD. Dựng bên ngoài tứ giác các hình bình hành ABEF, BCGH, CDIJ, DAKL.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{KF} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{IL} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{EL} - \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{FK} - \overrightarrow{GJ}$.

Hướng dẫn giải

a) Sử dụng tính chất của hiệu hai vectơ ta có:

$\overrightarrow{KF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BH} - \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{CJ} - \overrightarrow{CG}, \overrightarrow{IL} = \overrightarrow{DL} - \overrightarrow{DI}$

Từ đó

$\overrightarrow{KF} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{IL} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BH} - \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CJ} - \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DL} - \overrightarrow{DI}$

$= \left(\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BE}\right) + \left(\overrightarrow{BH} - \overrightarrow{CG}\right) + \left(\overrightarrow{CJ} - \overrightarrow{DI}\right) + \left(\overrightarrow{DL} - \overrightarrow{AK}\right) = \vec{0}$

b) Ta có

$\overrightarrow{EL} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{EL} - \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{FK} - \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{CG} - \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{JG} = \overrightarrow{FK} - \overrightarrow{GJ}$.

1.23. Cho tam giác ABC. Tìm tất cả những điểm M thoả mãn các trường hợp sau đây

a) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$;

b) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$;

c) $\left|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM}\right| = \left|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CM}\right|$;

d) $\left|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM}\right| = \left|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}\right|$.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}$ (luôn đúng)

Vậy M là điểm bất kì trên mặt phẳng

b) Giả sử điểm M thoả mãn

$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA}$

Vậy M là đỉnh thứ tư của hình bình hành ABCM.

c) Giả sử M là điểm thoả mãn

$\left|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM}\right| = \left|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CM}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right| \Leftrightarrow MA = MB$

$\Leftrightarrow$ M nằm trên đường trung trực đoạn AB.

d) Giả sử M thoả mãn $\left|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM}\right| = \left|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{CA}\right| \Leftrightarrow MA = CA$

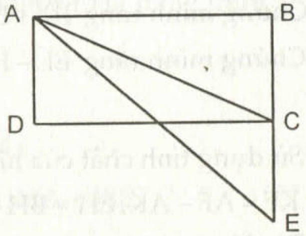
$\Leftrightarrow$ M nằm trên đường tròn tâm A, bán kính CA.

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN

1.24. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 2a, AD = a. Hãy xác định và tính độ dài của các vectơ sau đây :

a) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}$; b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$; c) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD}$.

Hướng dẫn giải



- $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}\right|=\left|\overrightarrow{DC}\right|=2a.$
- Dựng hình bình hành DACE.

  Khi đó $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}\Rightarrow\left|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AE}\right|$

  $\Rightarrow\left|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{AB^2+BE^2}=2a\sqrt{2}.$
- $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

  $\Rightarrow\left|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD}\right|=0.$

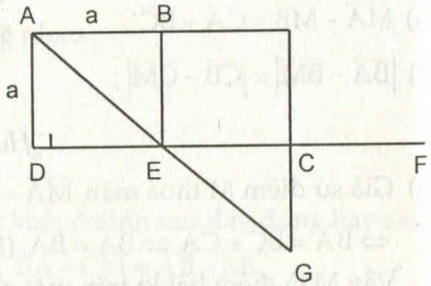
1.25. Cho hình thang vuông ABCD có hai đáy AB = a, CD = 2a, đường cao AD = a. Hãy xác định các vectơ sau và tính độ dài của chúng:

$$\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD},\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{EA},\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DA}.$$

Hướng dẫn giải

- $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CE}\Rightarrow\left|\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BA}\right|=\left|\overrightarrow{CE}\right|=CE=a.$
- $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DF}$

  $\Rightarrow\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right|=\left|\overrightarrow{DF}\right|=DF=3a.$



- $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CD}$

  $=\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DB}$

  $\Rightarrow\left|\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}\right|=\left|\overrightarrow{DB}\right|=a\sqrt{2}.$
- $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}$

  $\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{EA}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=a\sqrt{5}.$
- $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG}\Rightarrow\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DA}\right|=\left|\overrightarrow{AG}\right|=2a\sqrt{2}.$

1.26. Đường tròn nội tiếp của tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N và P. Cho $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.

Hướng dẫn giải

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$

hay $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN})=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\vec{0},$

vì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

Dựng một tam giác DEF có $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{CN}$, ta có

ΔABC đồng dạng $\Delta DEF\Rightarrow\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{CA}{FD}$. (1)

Đặt x = AP = DE, y = BM = EF, z = CN = FD. Ta có

$(1)\Leftrightarrow\dfrac{x+y}{x}=\dfrac{y+z}{y}=\dfrac{z+x}{z}=\dfrac{2(x+y+z)}{x+y+z}=2.$ (2)

$(2)\Rightarrow 1+\dfrac{y}{x}=1+\dfrac{z}{y}=1+\dfrac{x}{z}=2\Rightarrow x=y=z.$

Vậy ΔABC đều.

§4. PHÉP NHÂN VECTƠ VỚI MỘT SỐ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. *Định nghĩa*

Tích của vectơ $\vec{a}$ với số thực k là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau :

1) Nếu $k\geq 0$ thì vectơ $k\vec{a}$ cùng hướng với vectơ $\vec{a}$;

Nếu $k<0$ thì vectơ $k\vec{a}$ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$;

2) Độ dài của vectơ $k\vec{a}$ bằng $|k|.|\vec{a}|$.

2. *Tính chất*

- Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và mọi số thực k, l ta có :

  1) $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$;

  2) $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$

  3) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$; $k(\vec{a}-\vec{b})=k\vec{a}-k\vec{b}$;

  4) $k\vec{a}=\vec{0}\Leftrightarrow k=0$ hoặc $\vec{a}=\vec{0}$.
- I là trung điểm đoạn AB $\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$, với mọi điểm M.
- Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì với mọi điểm M ta luôn có :

  $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

3. *Điều kiện để hai vectơ cùng phương*

- $\vec{b}$ cùng phương $\vec{a}$ $(\vec{a}\neq\vec{0})\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R}:\vec{b}=k\vec{a}$.
- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R}:\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

4. *Biểu thị một vectơ qua hai vectơ không cùng phương*

Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó mọi vectơ $\vec{c}$ đều có thể biểu thị được một cách duy nhất qua hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số m và n sao cho $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$.

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

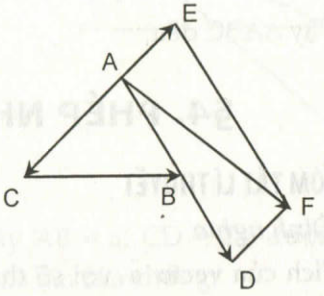
Dạng 1. Dựng vectơ.

- *Sử dụng định nghĩa.*
- *Các điểm cần xác định nên là điểm cuối vectơ.*

Bài 18. Cho tam giác ABC. Hãy xác định các điểm D, E, F sao cho :

a) $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; c) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

Giải.



a) Ta có $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ và AD =2AB

b) Ta có $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE}$ ngược hướng với $\overrightarrow{AC}$ và $AE = \frac{1}{2}AC$.

c) Dựng hình bình hành ADFE. Điểm F là điểm được xác định (như hình vẽ).

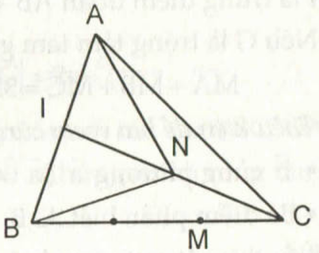
Dạng 2. Xác định điểm thoả mãn hệ thức vectơ

- *Nếu có thể nên thu gọn hệ thức*
- *Sử dụng một số kỹ thuật sau để rút gọn :*
  - *Nếu có* $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ *thì gọi I là trung điểm AB để có* $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$
  - *Nếu có* $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ *thì gọi G là trong tâm tam giác ABC để có* $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$
  - *Sử dụng hiệu của hai vectơ cùng điểm đầu* $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$

Bài 19. Cho tam giác ABC. Xác định các điểm M, N thoả mãn đẳng thức sau :

a) $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$; b) $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}$.

Giải.



a) Tacó

$\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ ngược hướng và MB = 2MC

$\Leftrightarrow$ M nằm trên đoạn BC và MB = 2MC.

b) Gọi I là trung điểm đoạn AB.

Khi đó $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} = 2\overrightarrow{NI}$.

Ta có: $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}. \Leftrightarrow 2\overrightarrow{NI} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{NI} + \overrightarrow{NC} = \vec{0} \Leftrightarrow$ N là trung điểm IC.

Dạng 3. Biểu diễn vectơ theo hai vectơ không cùng phương

- *Sử dụng qui tắc ba điểm, qui tắc hình bình hành để biến đổi vectơ.*
- *Nên chọn hai vectơ cơ sở (không cùng phương).*

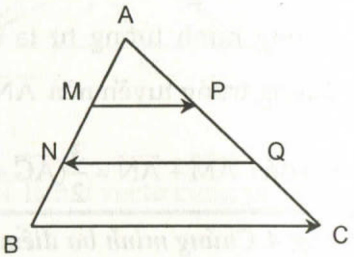
Bài 20. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N trên cạnh AB và P, Q trên cạnh AC sao cho AM = MN = NB và AP = PQ = QB.

a) Tính $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{QN}$ theo vectơ $\overrightarrow{BC}$.

b) Tính các vectơ $\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{NP}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Từ kết quả đó suy ra $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{BC}$.

Giải.



a) Ta có

$$\frac{MP}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow MP = \frac{1}{3}BC.$$

Chú ý rằng $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Ta cũng có $QN = \frac{2}{3}BC$ và $\overrightarrow{QN}, \overrightarrow{BC}$ ngược hướng.

Từ đó $\overrightarrow{QN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

b) Dễ dàng thấy rằng $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{NM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Từ đó ta có

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Như thế $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

Bài 21. Cho hình bình hành ABCD. Trên đường chéo BD lấy các điểm G và H sao cho DG = GH = HB.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AH}$.

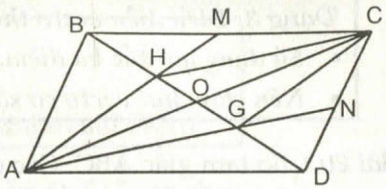
b) AH cắt BC tại M, AG cắt DC tại N. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

Giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG}$;

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}$;

suy ra: $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{BH}$



Vì $\overrightarrow{DG}$ và $\overrightarrow{BH}$ là hai vectơ đối nhau

nên $\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{BH}=\vec{0}$.

Vậy $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$.

b) Vì $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ nên $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AC}$.

Do đó tứ giác AHCG là hình bình hành, do đó :

BH = HG = 2HO (với O là giao điểm của AC và BD).

Suy ra H là trọng tâm của ΔABC, mà AM là đường trung tuyến

nên $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AH}$.

Chứng minh tương tự ta cũng có N là trọng tâm của ΔADC, mà AM là đường trung tuyến nên $\overrightarrow{AN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$.

Do đó : $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\frac{3}{2}(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AH})=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

Dạng 4. Chứng minh ba điểm thẳng hàng.

- ***Để chứng minh ba điểm phân biệt A,B,C thẳng hàng ta chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ cùng phương, nghĩa là $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.***
- ***Trong nhiều trường hợp ta biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ theo hai vectơ không cùng phương.***

Bài 22. Cho tam giác ABC.

a) Xác định điểm I sao cho $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

b) M và N là hai điểm thay đổi trên mặt phẳng sao cho

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$$

Chứng minh rằng M, N, I thẳng hàng.

Giải.

a) Gọi J là trung điểm đoạn AB. Khi đó $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{IJ}$.

Do đó $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IC}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow$ I là trung điểm đoạn JC.

b) Áp dụng qui tắc ba điểm, ta có

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)$

$=4\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}$, vì $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ nên

$\overrightarrow{MN}=4\overrightarrow{MI}$.

Từ đây suy ra M, N, I thẳng hàng.

Chú ý. *Kết luận ở câu b) có thể diễn đạt cách khác như là : Đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.*

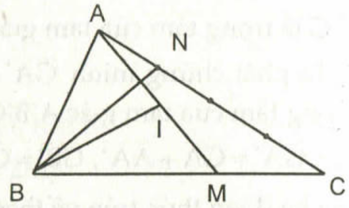
Bài 23. Cho tam giác ABC. N là điểm trên cạnh AC sao cho NC = 3NA. M là điểm trên cạnh BC với BM = kBC. Gọi I là trung điểm AM.

a) Tính các vectơ $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{BN}$ theo các vectơ $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$.

b) Xác định k sao cho ba điểm B, I, N thẳng hàng.

Giải.

a) Ta có $AN=\frac{1}{4}AC\Rightarrow\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BN}=k\overrightarrow{BC}$



Ta có

$$\overrightarrow{BI}=\frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}}{2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{k}{2}\overrightarrow{BC}.$$

$$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}.$$

b) Ba điểm B, I, N thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{BN}$ là hai vectơ cùng phương.

Điều này tương đương với $\frac{1/2}{3/4}=\frac{k/2}{1/4}\Leftrightarrow k=\frac{1}{3}$.

Dạng 5. Chứng minh tính chất hình học, hai điểm trùng nhau.

Bài 24. Cho tam giác ABC và điểm G. Chứng minh rằng

a) Nếu $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ thì G là trọng tâm của tam giác ABC ;

b) Nếu có điểm O sao cho $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$ thì G là trọng tâm của tam giác ABC.

(Bài tập Đại số 10 nâng cao)

Giải.

a) Gọi G′ là trọng tâm của ΔABC, ta có: $\overrightarrow{G'A}+\overrightarrow{G'B}+\overrightarrow{G'C}=\vec{0}$.

Do đó $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'B}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'C}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A}+\overrightarrow{G'B}+\overrightarrow{G'C}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GG'}=\vec{0}\Leftrightarrow G\equiv G'$.

Vậy $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ thì G là trọng tâm của ΔABC.

b) Ta có: $3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC}$

$=3\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$

$\Rightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Vậy G là trọng tâm của ΔABC.

Nhận xét. Từ lời giải của bài toán này ta có các kết quả sau :

G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG},\ \forall O$.

Bài 25. Cho tam giác ABC. Gọi A′ là điểm đối xứng của A qua B, B′ là điểm đối xứng của B qua C, C′ là điểm đối xứng của C qua A. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và A′B′C′ có cùng trọng tâm.

Giải.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Khi đó $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Ta cần phải chứng minh $\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\vec{0}$ và từ đó suy ra rằng G cũng là trọng tâm của tam giác A′B′C′.

Ta có $\overrightarrow{GA'}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{GB'}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{GC'}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CC'}$.

Cộng ba đẳng thức trên vế theo vế, ta được:

$$\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}.$$

Ta lại có $\overrightarrow{AA'}=2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BB'}=2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CC'}=2\overrightarrow{CA}$.

Từ đó $\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=2.\vec{0}=\vec{0}$.

Suy ra G là trọng tâm của tam giác A′B′C′.

Vậy hai tam giác có cùng trọng tâm.

Dạng 6. Tập hợp điểm.

- $\overrightarrow{AM}=k\vec{v}$ ***với A cố định và $\vec{v}$ không đổi thì tập hợp các điểm M là đường thẳng qua A và cùng phương với giá vectơ $\vec{v}$.***
- $|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}|$ ***với A, B cố định thì tập hợp các điểm M là đường trung trực đoạn AB .***
- $|\overrightarrow{AM}|=|\vec{v}|$ ***với A cố định, $\vec{v}\neq\vec{0}$ và có độ dài không đổi thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A , bán kính bằng $|\vec{v}|$.***

Bài 26. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}=k\overrightarrow{MC}$;

b) $\overrightarrow{MA}+(1-k)\overrightarrow{MB}+k\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Giải.

a) Giả sử điểm M thoả mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}=k\overrightarrow{MC}$.

Khi đó ta có: $\overrightarrow{MA}=k\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\right)=k\overrightarrow{BC}$

Suy ra hai vectơ $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng phương. Vì vectơ $\overrightarrow{BC}$ cố định nên tập hợp M là đường thẳng qua A và song song với BC.

b) Giả sử M là điểm thoả mãn $\overrightarrow{MA}+(1-k)\overrightarrow{MB}+k\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Ta có

$\overrightarrow{MA}+(1-k)\overrightarrow{MB}+k\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+k\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\right)+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+k\overrightarrow{BC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}=-k\overrightarrow{BC}$ (I là trung điểm AB)

Như thế hai vectơ $\overrightarrow{MI}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng phương. Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng qua I và song song với BC.

Bài 27. Cho hình bình hành ABCD. Tìm tập hợp những điểm M sao cho

a) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$;

b) $\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}\right|$.

Giải.

a) Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB, CD. Khi đó

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI},\ \overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MJ}$$

Giả sử M là điểm thoả mãn đẳng thức đã cho, ta có

$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{MI}\right|=\left|2\overrightarrow{MJ}\right|\Leftrightarrow MI=MJ$

Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực đoạn IJ.

b) Ta có $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}$.

Như thế vectơ $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ là vectơ không đổi. Do đó độ dài của nó là $|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}|=a$ không đổi.

Gọi K là điểm được xác định bởi $\overrightarrow{KC}+2\overrightarrow{KD}=\vec{0}$. Khi đó K cố định.

Giả sử M là điểm thoả mãn đẳng thức đã cho, ta có

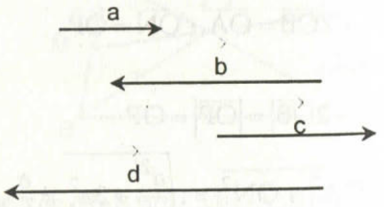
$\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}\right|\Leftrightarrow a=\left|\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KC}+2\overrightarrow{MK}+2\overrightarrow{KD}\right|$

$\Leftrightarrow|3\overrightarrow{MK}|=a\Leftrightarrow MK=\dfrac{a}{3}$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm K, bán kính $\dfrac{a}{3}$.

C. LUYỆN TẬP

- **Dựng vectơ**



1.27. Hình bên có 4 vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ lần lượt nằm trên 4 đường thẳng song song. Hãy xác định các số k, l, m, n sao cho :

$\vec{a}=k\vec{b}$, $\vec{b}=l\vec{c}$, $\vec{c}=m\vec{d}$, $\vec{a}=n\vec{c}$.

Hướng dẫn giải

$\vec{a}=-\dfrac{1}{2}\vec{b}$, $\vec{b}=-\dfrac{4}{3}\vec{c}$, $\vec{c}=-\dfrac{1}{2}\vec{d}$, $\vec{a}=\dfrac{2}{3}\vec{c}$.

1.28. Cho $\vec{a}$ khác $\vec{0}$.

Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

a) Hai vectơ $\vec{a}$ và $-3\vec{a}$ cùng hướng ;

b) Vectơ $-3\vec{a}$ có độ dài gấp ba lần độ dài vectơ $\vec{a}$;

c) Các vectơ $-\frac{3}{2}\vec{a}$ và $5\vec{a}$ cùng phương ;

d) Các vectơ $2\vec{a}$ và $-2\vec{a}$ có độ dài khác nhau.

Hướng dẫn giải

a) và d) sai ; b) và c) đúng.

1.29. Điểm M trên đoạn thẳng AB sao cho 3MA = 2MB. Hãy xác định số k để được đẳng thức đúng

a) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AB}$; c) $\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{AM}$;

d) $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BA}$; e) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AM}$; g) $\overrightarrow{BA} = k\overrightarrow{AM}$.

Hướng dẫn giải

a) $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$. b) $\overrightarrow{MA} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$. c) $\overrightarrow{MB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AM}$.

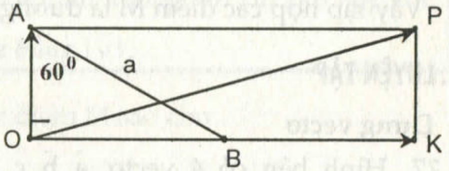
b) $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BA}$. e) $\overrightarrow{AB} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AM}$. g) $\overrightarrow{BA} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AM}$.

1.30. Cho tam giác OAB vuông tại O với AB = a và $\widehat{A} = 60^o$. Hãy dựng các vectơ sau đây và tính độ dài của chúng:

$$\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB},\ -\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB},\ \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}.$$

Hướng dẫn giải

Trước hết ta có $OA = \frac{a}{2}$, $OB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



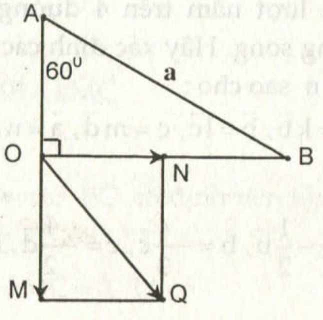
- Dựng điểm K thoả $\overrightarrow{OK} = 2\overrightarrow{OB}$.

$\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OP}$.

Do đó :

$\left|\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OP}\right| = OP$

$= \sqrt{OA^2 + ON^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + 3a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{13}$.



- Dựng các điểm M, N sao cho

$\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

Khi đó $-\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OP}$

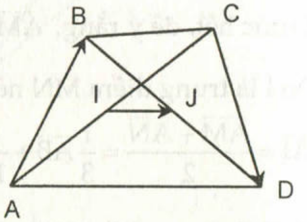
Vậy: $\left|-\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OQ}\right| = OQ = \sqrt{OM^2 + ON^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{16}} = \frac{a}{4}\sqrt{7}$

- Tương tự như trên ta có $\left|\frac{3}{2}\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}\right| = \frac{\sqrt{57}}{4}a$.
- **Chứng minh hệ thức vectơ**

1.31. Cho tứ giác ABCD có I, J là trung điểm của hai đường chéo AC, BD. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$; b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{IJ}$.

Hướng dẫn giải



a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD}$

$= \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{CI}\right) + \left(\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JD}\right) + 2\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IJ}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CJ}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$

$= 2\left(\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{CJ}\right) = -2\left(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JC}\right) = -4\overrightarrow{JI} = 4\overrightarrow{IJ}$.

1.32. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

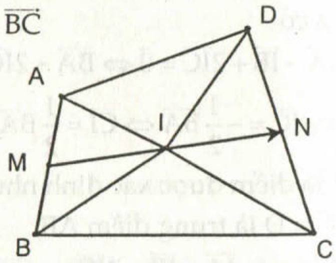
a) Chứng minh rằng $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$.

b) Gọi I là trung điểm đoạn MN. Chứng minh rằng $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

Hướng dẫn giải

Theo qui tắc ba điểm, ta có

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$



Từ đó $2\overrightarrow{MN} = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) + \left(\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN}\right) + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

Chú ý rằng: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$

Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh .

b) Do M, N là trung điểm của AB, CD

nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IM}$ và $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IN}$

Vậy $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\left(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN}\right) = \vec{0}$.

1.33. Cho đoạn thẳng AB. Gọi M là điểm được xác định bởi $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ $(k \neq -1)$. Chứng minh rằng với mọi điểm O bất kì trong mặt phẳng ta luôn có $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1 + k}$.

Hướng dẫn giải

Với điểm O bất kì, ta có

$$\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}=k\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}\right)\Leftrightarrow(1-k)\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}-k\overrightarrow{OB}$$

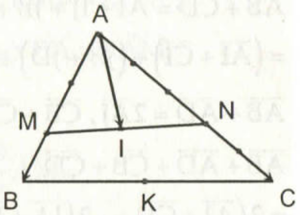
Vì $k\neq1$ nên $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}-k\overrightarrow{OB}}{1-k}$.

1.34. Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên hai cạnh AB, AC sao cho AM = 2MB và 2AN = 3NC. Gọi I là trung điểm đoạn MN.

a) Chứng minh $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{10}\overrightarrow{AC}$.

b) Gọi K là trung điểm cạnh BC. Tính $\overrightarrow{IK}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn giải



a) Trước hết, để ý rằng: $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AN}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.

Do I là trung điểm MN nên

$$\overrightarrow{AI}=\frac{\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}}{2}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{10}\overrightarrow{AC}.$$

b) Vì K là trung điểm BC nên $\overrightarrow{AK}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$.

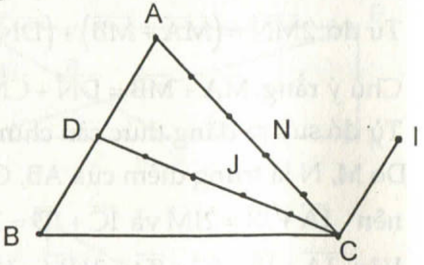
Từ đó $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AI}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$.

1.35. Cho tam giác ABC. Xác định các điểm I, J, K, L sao cho

a) $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$; b) $\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=\vec{0}$;

c) $2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{CA}$; d) $\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{LB}+2\overrightarrow{LC}=\vec{0}$.

Hướng dẫn giải



a) Ta có

$\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{IC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow\overrightarrow{CI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}.$

I là điểm được xác định như hình vẽ.

b) Gọi D là trung điểm AB.

Khi đó $\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}=2\overrightarrow{JD}$.

Từ đó $\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=\vec{0}\Leftrightarrow2\overrightarrow{JD}+3\overrightarrow{JC}=\vec{0}$.

Như thế J là điểm nằm trong đoạn CD sao cho 2JD = 3JC (hình vẽ).

c) Ta có $2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{CA}\Leftrightarrow2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}\Leftrightarrow2\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$

$2\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow$ K là trung điểm đoạn AB.

d) Gọi E là trung điểm BC. Khi đó $\overrightarrow{LB}+\overrightarrow{LC}=2\overrightarrow{LE}$. .

Ta có $2\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{LB}+\overrightarrow{LC}=\vec{0}\Leftrightarrow2\overrightarrow{LA}+2\overrightarrow{LE}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{LE}=\vec{0}\Leftrightarrow$ L là trung điểm đoạn AE.

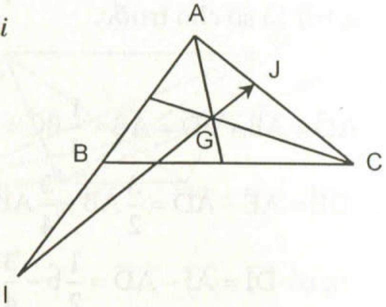
1.36. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi I, J là hai điểm xác định bởi

$$\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB},\ 3\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}.$$

a) Tính $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IG}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng I, J, G là ba điểm thẳng hàng .

Hướng dẫn giải



a) Dễ thấy I là điểm đối xứng của A qua B và J là điểm nằm trên đoạn AC sao cho 3JA = 2JC.

Ta có $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{AI}=-2\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. (1)

Gọi M là trung điểm của BC. Khi đó

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\left(\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Vậy $\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}=\frac{-5}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. (2)

b) (1) và (2) ⇒ Ta có $5\overrightarrow{IJ}=6\overrightarrow{IG}=-10\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$, từ đó ta có

$\overrightarrow{IJ}=\frac{6}{5}\overrightarrow{IG}\Rightarrow$ I, J ,G thẳng hàng.

1.37. Cho tứ giác ABCD. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và BCD. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{G_1G_2}=\dfrac{\overrightarrow{G_2D}-\overrightarrow{G_1A}}{2}$;

b) $\overrightarrow{G_1D}+\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}+\overrightarrow{G_2A}+\overrightarrow{G_2B}+\overrightarrow{G_2C}=\vec{0}$.

Hướng dẫn giải

a) Theo giả thiết

$\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}=\overrightarrow{G_2B}+\overrightarrow{G_2C}+\overrightarrow{G_2D}=\vec{0}$

Từ đó $\overrightarrow{G_2D}=-\overrightarrow{G_2B}-\overrightarrow{G_2C}$ và $\overrightarrow{G_1A}=-\overrightarrow{G_1B}-\overrightarrow{G_1C}=\overrightarrow{BG_1}+\overrightarrow{CG_1}$

Do đó $\overrightarrow{G_2D}-\overrightarrow{G_1A}=-\overrightarrow{G_2B}-\overrightarrow{G_2C}+\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}=2\overrightarrow{G_1G_2}$

b) Ta có $\overrightarrow{G_1D}+\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}=3\overrightarrow{G_1G_2}$ và $\overrightarrow{G_2A}+\overrightarrow{G_2B}+\overrightarrow{G_2C}=3\overrightarrow{G_2G_1}$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh

1.38. Cho tam giác ABC. Gọi D là điểm trên cạnh BC sao cho DC=3DB, E là điểm trên tia đối của tia BA sao cho AB = 2BE. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$.

a) Tính các vectơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DE}$ theo các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.

b) Gọi I là trung điểm AC. Chứng minh rằng D, E, I thẳng hàng và D là trung điểm EI.

c) Xác định điểm N trên mặt phẳng sao cho $5\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} + 5\overrightarrow{NC} = \vec{0}$.

d) Tìm tập hợp những điểm P trên mặt phẳng sao cho $\left|\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = k$ với $k > 0$ là số cho trước.

Hướng dẫn giải

a) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$

b) Ta có $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} = -\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

So sánh ta thấy $\overrightarrow{DI} = -\overrightarrow{DE} \Rightarrow$ D, E, I thẳng hàng và D là trung điểm EI.

c) Gọi J là trung đm BC. Ta có $5\overrightarrow{NA} + 5\overrightarrow{NC} = 5\left(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC}\right) = 10\overrightarrow{NI}$.

Do đó $5\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} + 5\overrightarrow{NC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{NB} + 10\overrightarrow{NI} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{NB} + 5\overrightarrow{NI} = \vec{0}$

Vậy N là điểm trên đoạn BI sao cho NB = 5NI.

d) Gọi E là đỉnh của hình bình hành ABEC. Khi đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = k \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AE}\right| = k \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{EP}\right| = k \Leftrightarrow EP = k$

Vậy tập hợp điểm P là đường tròn tâm E bán kính k.

1.39. Cho tứ giác ABCD và điểm M tùy ý. Chứng minh rằng các vectơ sau không phụ thuộc vào M

a) $\vec{a} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$;

b) $\vec{b} = -\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$;

c) $\vec{c} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$;

d) $\vec{d} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{DM}$.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ bằng một vectơ cố định.

a) $\vec{a} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

b) $\vec{b} = -\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 3\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right) + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$

c) $\vec{c} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} + 2\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD}\right) + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$

$= \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$.

d) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

Khi đó $\vec{d} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{DM} = 3\left(\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MD}\right) = 3\overrightarrow{DG}$.

1.40. Cho hình bình hành ABCD có tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và CD. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

a) Tính các vectơ $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{AM}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$.

b) Gọi I là giao điểm của BN và DM. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

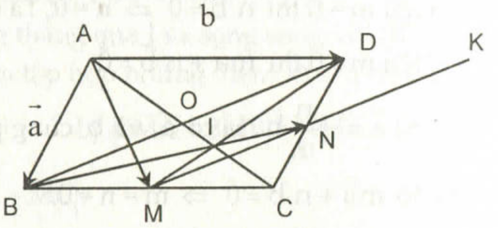
c) Gọi K là điểm xác định bởi $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\vec{b}$. Chứng minh N là trung điểm đoạn MK.

Hướng dẫn giải

a) $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{BN} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$

b) I là trọng tâm của ΔBCD.

c) Ta có $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$



$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$

$= \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\vec{b} - \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = -\vec{a} + \vec{b}$

Dễ thấy $\overrightarrow{MK} = 2\overrightarrow{MN}$. Từ đó suy ra kết luận của bài toán.

1.41. Cho tam giác ABC.

a) Xác định điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}$.

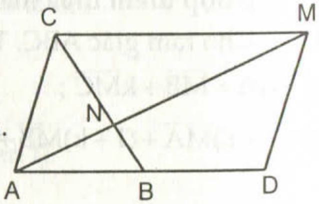
b) Cho N là điểm thoả mãn $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BC}$. Xác định k sao cho A, M, N thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

a) Dựng điểm D sao cho $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$.

Tiếp theo dựng hình bình hành ACMD.

Khi đó $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}$. M là điểm cần xác định.



b) Ta có

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AB} + k\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$

A, M, N thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AN}$ cùng phương

$\Leftrightarrow \frac{1-k}{2} = \frac{k}{1} \Leftrightarrow 1 - k = 2k \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$.

1.42. a) Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$, $\vec{b}$. Chứng minh :

$$m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow m = n = 0.$$

b) Cho tam giác ABC có các cạnh là a = BC, b = AC, c = AB và trọng tâm G. Chứng minh rằng nếu $a.\overrightarrow{GA}+b.\overrightarrow{GB}+c.\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ thì tam giác ABC là tam giác đều.

Hướng dẫn giải

a) • Nếu m = n = 0 thì ta có $m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}$.

• Đảo lại nếu $m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}$, ta có :

+ Nếu m = 0 thì $n\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow n=0$. Ta có m = n = 0.

+ Nếu m ≠ 0 thì $m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}$

$\Rightarrow \vec{a}=-\dfrac{n}{m}\vec{b}$, ta có $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương (trái giả thiết) : Không xảy ra.

Do đó $m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow m=n=0$.

Vậy $m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow m=n=0$.

b) Vì ABC là một tam giác có trọng tâm G nên ta có

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GA}=-(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})$.

Theo giả thiết $a.\overrightarrow{GA}+b.\overrightarrow{GB}+c.\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ta có

$-a(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+b.\overrightarrow{GB}+c.\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Leftrightarrow (b-a).\overrightarrow{GB}+(c-a).\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Vì $\overrightarrow{GB}$ và $\overrightarrow{GC}$ là hai vectơ không cùng phương nên theo câu a), ta có :

$b-a=c-a=0 \Leftrightarrow a=b=c$.

Vậy tam giác ABC là tam giác đều.

- **Tập hợp điểm thoả mãn hệ thức vectơ**

1.43. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp những điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}+k\overrightarrow{MC}$; b) $\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$;

b) $(1-k)\overrightarrow{MA}+(1+k)\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$; d) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=k\overrightarrow{BC}$.

Hướng dẫn giải

a) Gọi M là điểm thoả mãn hệ thức đã cho, ta có

$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}+k\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=k\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}=k\overrightarrow{MC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{MC}$ là hai vectơ cùng phương

$\Leftrightarrow$ M nằm trên đường thẳng qua C và song song với AB.

b) Gọi I là trung điểm AC. Khi đó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}$. Từ đó ta có

$\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}+k\overrightarrow{MB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}=-\dfrac{k}{2}\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MB}$

cùng phương hay M, B, I thẳng hàng.

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng BI.

c) Giả sử M là điểm thoả mãn giả thiết bài toán, ta có

$(1-k)\overrightarrow{MA}+(1+k)\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+k(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG}+k\overrightarrow{BA}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}=-\dfrac{k}{3}\overrightarrow{BA}$.

Với G là trọng tâm tam giác ABC.

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng qua G và song song với AB.

d) Gọi I là trung điểm AB và J là trung điểm CJ. Khi đó

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=k\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{MC}=k\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MJ}=k\overrightarrow{BC}$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng qua J và song song với BC.

1.44. Cho hai điểm A, B cố định. Tìm tập hợp những điểm M sao cho

a) $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|=\dfrac{2}{3}\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$; b) $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|=\left|4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$;

c) $\left|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right|=\left|3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right|$.

Hướng dẫn giải

1.44. a) Gọi I là điểm thoả mãn $\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$, khi đó ta có

$\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=4\overrightarrow{MI}$.

Ta có $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|=\dfrac{2}{3}\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right| \Leftrightarrow \left|4\overrightarrow{MI}\right|=\dfrac{2}{3}\left|\overrightarrow{BA}\right| \Leftrightarrow MI=\dfrac{1}{6}BA$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I bán kính BA/6.

c) $\left|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right|=\left|3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right|$.

b) Gọi I và J là hai điểm thoả mãn $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$, $4\overrightarrow{JA}-\overrightarrow{JB}=0$

Cho M là điểm thoả mãn yêu cầu bài toán. Khi đó ta có

$2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=5\overrightarrow{MI}$, $4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=5\overrightarrow{MJ}$

Suy ra $\left|5\overrightarrow{MI}\right|=\left|5\overrightarrow{MJ}\right| \Leftrightarrow MI=MJ$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực đoạn IJ.

c) Trước hết chú ý rằng

$$3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}=2\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right)+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC} \;=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\vec{u}$$

Gọi I là điểm thoả mãn $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Khi đó ta có

$$3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}$$

Từ đó, giả thiết bài toán trở thành

$$\left|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right|=\left|3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right| \Leftrightarrow \left|2\overrightarrow{MI}\right|=\left|\vec{u}\right| \Leftrightarrow MI=\frac{\left|\vec{u}\right|}{2}$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I bán kính bằng $\dfrac{|\vec{u}|}{2}$.

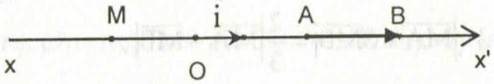
§5.TRỤC TOẠ ĐỘ VÀ HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. *Trục toạ độ*

- Toạ độ của vectơ $\vec{u}$ là số a được xác định bởi $\vec{u} = a\vec{i}$.
- Toạ độ của điểm M là số m được xác định bởi $\overrightarrow{OM} = m\vec{i}$.
- Độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{AB}$ trên một trục là một số được kí hiệu là $\overline{AB}$ và được xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}.\vec{i}$ ($\vec{i}$ là vectơ đơn vị của trục).

* Hệ thức Sa-lơ: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$
với mọi điểm A, B, C trên trục Ox.



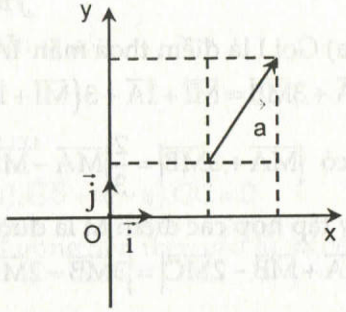
2. *Hệ trục toạ độ*

- Trong hệ trục toạ độ Oxy

$\vec{a} = (x;y) \Leftrightarrow \vec{a} = x.\vec{i} + y\vec{j}$

$M(x;y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x;y)$

$\overrightarrow{MN} = \left(x_N - x_M; y_N - y_M\right)$



- Giả sử $\vec{a} = (x;y), \vec{b} = (x';y')$. Khi đó

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

$\vec{a} + \vec{b} = (x + x'; y + y')$

$\vec{a} - \vec{b} = (x - x'; y - y')$

$k\vec{a} = (kx; ky)$ với $k \in \mathbb{R}$

$\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a} \neq \vec{0}$ $\Leftrightarrow x' = kx, y' = ky$ với $k \in \mathbb{R}$

- Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}; y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}$
- Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3};\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 1. Một số bài toán về tọa độ của điểm trên một trục.

Bài 28. Trên trục x'Ox cho 3 điểm A, B, C lần lượt có toạ độ là −3, 2, 5.

a) Tính toạ độ các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, -3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CA}$

b) Tìm toạ độ điểm M trên trục sao cho $-3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Giải.

a) Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $2 - (-3) = 5$.

Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{BC}$ là $5 - 2 = 3$.

Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{CA}$ là $-3 - 5 = -8$.

Toạ độ của vectơ $-3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CA}$ là $-3.5 + 4.3 + 2(-8) = -19$.

b) Gọi x là toạ độ của M. Khi đó toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MC}$ lần lượt là $x + 3, x - 2, 5 - x$. Theo giả thiết

$-3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow -3(x+3) + x - 2 + 5 - x = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Vậy toạ độ của M là $x = -2$.

Bài 29. Trên một trục cho 4 điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng

$\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AC}.\overline{DB} + \overline{AD}.\overline{BC} = 0$ (Hệ thức Euler).

Giải.

Gọi toạ độ của 4 điểm A, B, C, D lần lượt là a, b, c, d.

Khi đó vế trái của đẳng thức cần chứng minh là

$(b - a)(d - c) + (c - a)(b - d) + (d - a)(c - b)$

Thực hiện khai triển và rút gọn ta có điều phải chứng minh.

Dạng 2. Tính toán về tọa độ điểm – vectơ trên mặt phẳng.

- *Sử dụng các công thức về toạ độ điểm – vectơ.*
- *Sử dụng điều kiện của hai vectơ cùng phương.*

Bài 30. Cho các vectơ $\vec{a} = (-3;1),\ \vec{b} = (4;3),\ \vec{c} = (-2;6)$.

a) Xác định toạ độ của các vectơ $2\vec{a} - 3\vec{b}$, $-3\vec{a} + 4\vec{b} + 2\vec{c}$.

b) Xác định hai số x, y sao cho $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Giải.

a) + Ta có $2\vec{a} = (-6;2), 3\vec{b} = (12;9)$.

Từ đó $2\vec{a} - 3\vec{b} = (-18;-7)$.

+ Ta có $-3\vec{a} = (9;-3)$, $4\vec{b} = (16;12)$, $2\vec{c} = (-4;12)$.

Như thế $-3\vec{a} + 4\vec{b} + 2\vec{c} = (21;21)$.

b) Giả sử $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Khi đó ta có $\begin{cases} -3x + 4y = -2 \\ x + 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{30}{13} \\ y = \dfrac{16}{13} \end{cases}$. Vậy $\vec{c} = \dfrac{30}{13}\vec{a} + \dfrac{16}{13}\vec{b}$.

Dạng 3. Ba điểm A, B, C thẳng hàng, không thẳng hàng.

- *Tính tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.*
- *Bằng tọa độ chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương. Suy ra A, B, C không thẳng hàng.*

Bài 31. Cho ba điểm $A(5;-2)$, $B(1;3)$, $C(2;-4)$.

Chứng minh rằng ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4;5)$, $\overrightarrow{AC} = (-3;-2)$

$\frac{-4}{-3} \neq \frac{5}{-2} \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Vậy ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Bài 32. Cho $A(-1;2)$, $B(3;1)$.

a) AB cắt trục Oy tại N. Tìm tọa độ điểm N.

b) Tìm tọa độ điểm M trên $(d): y = 1$ để A, B, M thẳng hàng.

Giải.

a) Vì N nằm trên trục tung nên $N(0;y)$. Ta có :

$\overrightarrow{AN} = (1; y-2)$, $\overrightarrow{AB} = (4;-1)$

AB cắt trục Oy tại N $\Leftrightarrow \overrightarrow{AN}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{y-2}{-1} \Leftrightarrow y = \frac{7}{4}$. Vậy $N\left(0; \frac{7}{4}\right)$.

b) Điểm M thuộc đường thẳng $y = 1$ nên ta có tọa độ $M(x;1)$. Ta có $\overrightarrow{AM} = (x+1;-1)$, $\overrightarrow{AB} = (4;-1)$.

A, M, B thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \frac{x+1}{4} = \frac{-1}{-1} \Leftrightarrow x+1 = 4 \Leftrightarrow x = 3$. Vậy $M(3;1)$.

Dạng 4. Xác định tọa độ điểm M thoả điều kiện cho trước.

- ***Tìm đặc trưng hình học của điểm M.***
- ***Chuyển các đặc trưng hình học sang tọa độ.***

Bài 33. Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm $A(1;-2)$, $B(3;4)$, $C(0;5)$

a) Tính toạ độ các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. Suy ra A, B, C là ba đỉnh của một tam giác. Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác đó.

b) Tìm toạ độ điểm D sao cho ABCD là hình bình hành.

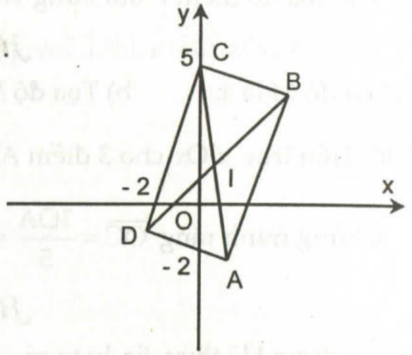
Giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;6)$, $\overrightarrow{AC} = (-1;7)$.

Ta thấy các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Do đó A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó ta có

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{4}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{7}{3} \end{cases}$$ Vậy $G\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right)$.



b) Giả sử $D(x;y)$.

Vì ABCD là hình bình hành

nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Ta có $\overrightarrow{DC} = (-x; 5-y)$. Do đó

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -x \\ 6 = 5 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy $D(-2;-1)$. Tâm I của hình bình hành là trung điểm đường chéo AC. Do đó $I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Bài 34. Cho tam giác ABC với $B(1;-1)$, $C(6;-3)$. Biết trọng tâm của tam giác nằm trên trục hoành và trung điểm M của cạnh AB cách đều hai trục tọa độ. Xác định tọa độ điểm A.

Giải.

Giả sử $A(a;b)$. Khi đó trọng tâm G của tam giác có tọa độ

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right) \text{ hay } G\left(\frac{7+a}{3}; \frac{b-4}{3}\right)$$

Do G nằm trên trục hoành nên $b - 4 = 0$ hay $b = 4$.

Vậy $A(a;4)$, $G\left(\frac{7+a}{3}; 0\right)$

Trung điểm M của cạnh AB là $M\left(\frac{a+1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Do M cách đều hai trục tọa độ

nên $|x_M| = |y_M| \Leftrightarrow \left|\frac{a+1}{2}\right| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+1 = 3 \\ a+1 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = -4. \end{array}\right.$

Vậy $A(2;4)$ hoặc $A(-4;4)$.

C. LUYỆN TẬP

- **Tọa độ điểm, vectơ trên một trục**

1.45. Trên trục x'Ox cho hai điểm A và B có toạ độ lần lượt là 2 và 8.

a) Tìm toạ độ điểm M biết rằng $\overline{MB}+2\overline{MA}=0$.

b) Tìm toạ độ điểm N biết rằng $\overline{NB}-3\overline{NA}=0$.

c) Tìm toạ độ điểm P đối xứng với B qua A.

Hướng dẫn giải

a) Tọa độ M là 4. b) Tọa độ N là –1. c) Tọa độ P là –4.

1.46. Trên trục x'Ox cho 3 điểm A, B, C phân biệt thoả mãn điều kiện $\frac{\overline{AC}}{2}=\frac{\overline{CB}}{3}$.

Chứng minh rằng $\overline{OC}=\frac{3\overline{OA}}{5}+\frac{2\overline{OB}}{5}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng Hệ thức Sa-lơ ta có

$$\frac{\overline{AO}+\overline{OC}}{2}=\frac{\overline{CO}+\overline{OB}}{3}\Leftrightarrow -3\overline{OA}+3\overline{OC}=-2\overline{OC}+2\overline{OB}$$

Hay $5\overline{OC}=3\overline{OA}+2\overline{OB}\Rightarrow\overline{OC}=\frac{3}{5}\overline{OA}+\frac{2}{5}\overline{OB}$ (đpcm).

Gọi I là điểm thoả mãn $3\overline{IA}+\overline{IB}-2\overline{IC}=\vec{0}$.

- **Tính toán về tọa độ điểm – vectơ trên mặt phẳng**

1.47. Cho hai vectơ $\vec{a}=(2;5),\vec{b}=(2;3)$. Khi đó vectơ $\vec{v}=2\vec{a}-3\vec{b}$ cùng phương với vectơ nào sau đây ?.

a) $\overrightarrow{u_1}=(1;1)$ b) $\overrightarrow{u_2}=(-4;-2)$

c) $\overrightarrow{u_3}=\left(\sqrt{2};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ d) $\overrightarrow{u_4}=\left(2\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$

Hướng dẫn giải

Ta có $2\vec{a}=(4;10),3\vec{b}=(6;9)\Rightarrow\vec{v}=2\vec{a}-3\vec{b}=(-2;1)$

Từ đó ta thấy $\vec{v}$ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{u_3}$ vì $\frac{-2}{\sqrt{2}}=\frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

1.48. Trong mặt phẳng tọa độ, mỗi mệnh đề sau đây đúng hay sai ?

a) Hai vectơ đối nhau khi và chỉ khi chúng có hoành độ đối nhau và tung độ đối nhau.

b) Nếu vectơ $\vec{a}\neq\vec{0}$ cùng hướng với vectơ $\vec{i}$ thì nó có hoành độ dương.

c) Nếu vectơ $\vec{a}\neq\vec{0}$ ngược hướng với vectơ $\vec{j}$ thì nó có tung độ âm.

d) Nếu vectơ $\vec{a}$ không cùng phương với cả hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$ thì cả hai toạ độ của nó đều khác 0.

e) Hai vectơ $\vec{a}=(-3;\sqrt{3})$ và $\vec{b}=(\sqrt{3};-1)$ là hai vectơ cùng hướng.

Hướng dẫn giải

a) Đúng

b) Đúng vì $\vec{i}=(1;0)$ và nếu $\vec{a}\neq\vec{0}$ cùng hương với $\vec{i}$ thì $\vec{a}=k\vec{i}=(k;0)$ với $k>0$.

c) Đúng (tương tự câu b)

d) Đúng. Ta luôn viết được $\vec{a}=(x;y)=x\vec{i}+y\vec{j}$.

Do giả thiết nên cả x và y đều khác 0.

e) Sai. Ta có $\vec{a}=-\sqrt{3}\vec{b}\Rightarrow\vec{a},\vec{b}$ ngược hướng.

1.49. Cho các vectơ $\vec{u}=-\frac{1}{2}\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{v}=2\vec{i}+x\vec{j}$

a) Xác định x sao cho hai vectơ $\vec{u},\vec{v}$ cùng phương.

b) Xác định x sao cho vectơ $2\vec{u}-3\vec{v}$ cùng phương với vectơ $\vec{i}$.

Hướng dẫn giải

a) Hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương khi và chỉ khi $\frac{2}{-\frac{1}{2}}=\frac{x}{3}\Leftrightarrow x=-12$

b) Ta có $2\vec{u}=-\vec{i}+6\vec{j},3\vec{v}=6\vec{i}+3x\vec{j}\Rightarrow 2\vec{u}-3\vec{v}=-7\vec{i}+(6-3x)\vec{j}$

Vectơ $2\vec{u}-3\vec{v}$ cùng phương với vectơ $\vec{i}$ khi $6-3x=0\Leftrightarrow x=2$.

1.50. Cho các vectơ $\vec{a}=(-3;4)$, $\vec{b}=(-1;3)$, $\vec{c}=(2;0)$.

a) Tìm toạ độ các vectơ $2\vec{a}+\vec{b}$, $-\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}$.

b) Xác định k, l sao cho $k\vec{a}+l\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

c) Xác định các số k, l sao cho vectơ $\vec{c}$ cùng phương với vectơ $\vec{v}=k\vec{a}+l\vec{b}$ và $|\vec{v}|=5$.

Hướng dẫn giải

a) Tìm toạ độ các vectơ $2\vec{a}+\vec{b}=(-8;11)$, $\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}=(-2;5)$.

b) Ta có $k\vec{a}=(-3k;4k),l\vec{b}=(-l;3l)\Rightarrow k\vec{a}+l\vec{b}=(-3k-l;4k+3l)$

Ta có: $k\vec{a}+l\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}-3k-l+2=0\\4k+3l=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\frac{6}{5}\\l=-\frac{8}{5}\end{cases}$

c) Ta thấy hai vectơ cùng phương khi $4k+3l=0 \Leftrightarrow l=\dfrac{-4k}{3}$

Khi đó độ dài vectơ $\vec{v}$ là $|-3k-l|=\left|-3k+\dfrac{4}{3}k\right|=\dfrac{5|k|}{3}$

Theo giả thiết $|\vec{v}|=\dfrac{5|k|}{3}=5 \Leftrightarrow k=\pm 3$

Vậy ta có hai đáp số $(k;l)=(3;-4)$ hoặc $(k;l)=(-3;4)$.

1.51. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

a) Nếu OH = 1, OK = 2 với H, K lần lượt là hình chiếu của A lên Ox, Oy thì điểm A có toạ độ là A(1 ; 2).

b) Nếu $A(x;y)$ và $\overrightarrow{OB}=x\vec{i}-y\vec{j}$ với $y \neq 0$ thì A và B đối xứng nhau qua trục Oy.

c) Nếu hai điểm A và B có hoành độ đối nhau, tung độ đối nhau thì trung điểm đoạn AB là gốc toạ độ O.

d) Nếu A(a ; 1) và B(–a ; 3) thì trung điểm đoạn AB nằm trên trục hoành.

Hướng dẫn giải

a) Sai (phải sửa lại là $\overline{OH}=1, \overline{OK}=2$,

b) Sai (đối xứng qua Ox),

c) Đúng, d) Sai (nằm trên Oy).

- **Xác định tọa độ điểm thoả mãn điều kiện cho trước**

1.52. Trong mặt phẳng tọa độ cho ba điểm A(–2 ; 5), B(2 ; 2), C(10 ; 4).

a) Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác. Tìm toạ độ trọng tâm của tam giác đó.

b) Tìm điểm D trên trục hoành sao cho A, B, D thẳng hàng.

c) Tìm điểm E trên trục tung sao cho ABCE là hình thang với hai đáy là AB, CE.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;-3), \overrightarrow{AC}=(12;-1)$

Hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Vậy A,B,C là ba đỉnh của một tam giác.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Dễ có $G\left(\dfrac{10}{3};\dfrac{11}{3}\right)$.

b) Lấy $D(x;0)$ là điểm nằm trên trục hoành. Khi đó $\overrightarrow{AD}=(x+2;-5)$

Ba điểm A, B, D thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ cùng phương

$\Leftrightarrow \dfrac{x+2}{4}=\dfrac{-5}{-3} \Leftrightarrow 3x+6=20 \Leftrightarrow x=\dfrac{14}{3}$. Vậy $D\left(\dfrac{14}{3};0\right)$.

a) Lấy $E(0;y)$ là điểm nằm trên trục tung. Khi đó $\overrightarrow{CE}=(-10;y-4)$

ABCE là hình thang $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CE}$ cùng phương

$\Leftrightarrow \dfrac{-10}{4}=\dfrac{y-4}{-3} \Leftrightarrow 4y-16=30 \Leftrightarrow y=\dfrac{23}{2}$. Vậy $E\left(0;\dfrac{23}{2}\right)$.

1.53. Trong mặt phẳng tọa độ cho ba điểm A(2;–1), B(x;2) và C(–3;y).

a) Xác định x, y sao cho B là trung điểm của đoạn AC.

b) Xác định x, y sao cho tam giác ABC nhận gốc toạ độ O làm trọng tâm.

c) Tìm hệ thức liên hệ giữa x, y sao cho A, B, C là ba điểm thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

a) B là trung điểm đoạn AC khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_B=\dfrac{x_A+x_C}{2} \\ y_B=\dfrac{y_A+y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2-3}{2} \\ 2=\dfrac{y-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=5 \end{cases}$$

b) Vì tam giác ABC nhận gốc O làm trọng tâm nên

$$\begin{cases} 2+x-3=0 \\ -1+2+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1. \end{cases}$$

c) $\overrightarrow{AB}=(x-2;3), \overrightarrow{AC}=(-5;y+1)$

A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương $(x-2)(y+1)+15=0$.

1.54. Cho A(2;1) ,B(2;–1) ,C(x;–3) , D(–2;y).

a) Tìm x, y để ABCD là hình bình hành .

b) Tìm x, y sao cho ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác nhận D làm trọng tâm.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(0;-2), \overrightarrow{AC}=(x-2;-4), \overrightarrow{DC}=(x+2;-3-y)$.

ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ và A , B , C không thẳng hàng

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0.(-4)+2(x-2)\neq 0 \\ x+2=0 \\ -3-y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1. \end{cases}$$

b) Dễ thấy là ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Do đó :

ΔABC nhận D làm trọng tâm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=x_D \\ \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+2+x=-6 \\ 1-1-3=3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-10 \\ y=-1. \end{cases}$$

1.55. Cho giác ABC biết A(3; 7), trọng tâm $G\left(\frac{7}{3};3\right)$, điểm B nằm trên tia Oy và điểm C nằm trên tia Ox. Tìm tọa độ B và C.

Hướng dẫn giải

Gọi $C(x_C\,;0)$ và $B(0\,;y_B)$ lần lượt nằm trên các trục Ox và Oy sao cho ΔABC nhận G làm trọng tâm. Ta có :

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3+0+x_C=7\\7+y_B+0=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_C=4\\y_B=2\end{cases}$$

Vậy B(0 ; 2) và C(4 ; 0).

1.56. Trong mặt phẳng tọa độ cho ba điểm M(2;–3) , N(–1;2) , P(3;–2).

a) Xác định toạ độ điểm Q sao cho $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MN}-2\overrightarrow{MQ}=\vec{0}$.

b) Xác định toạ độ ba đỉnh của tam giác ABC sao cho M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\overrightarrow{MN}=(-3;5),\overrightarrow{MP}=(1;1)\Rightarrow\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=(-2;6)$

Giả sử $Q(x;y)$. Khi đó $\overrightarrow{MQ}=(x-2;y+3)\Rightarrow 2\overrightarrow{MQ}=(2x-4;2y+6)$

Ta có $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MN}-2\overrightarrow{MQ}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MQ}\Leftrightarrow\begin{cases}-2=2x-4\\6=2y+6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$

Vậy Q(1;0).

b) Giả sử $A(x;y)$. Vì N là trung điểm CA nên

$$\begin{cases}x_C=2x_N-x_A=-2-x\\y_C=2y_N-y_A=4-y\end{cases}\Rightarrow C(-2-x;4-y).$$

M là trung điểm BC

$$\Rightarrow\begin{cases}x_B=2x_M-x_C=6+x\\y_B=2y_M-y_C=-10+y\end{cases}\Rightarrow B(6+x;-10+y).$$

P là trung điểm AB $\Rightarrow\begin{cases}x_P=\dfrac{x_A+x_B}{2}\\y_P=\dfrac{y_A+y_B}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6+2x=6\\2y-10=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=3.\end{cases}$

Vậy $A(0;3),B(6;-7),C(-2;1)$.

§6. BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG I

1.57. Cho lục giác đều ABCDEF có tâm O. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$;

b) Với mọi điểm M tuỳ ý thì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MF}$.

Hướng dẫn giải

a) ABCDEF là lục giác đều tâm O. Khi đó các cặp điểm A và D, B và E, C và F đối xứng qua tâm O. Do đó: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$.

b) Dễ dàng có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MF}=2\overrightarrow{MO}$

1.58. Cho tam giác ABC. Hai điểm M và N lần lượt di động trên các đường thẳng AB và AC sao cho $\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=n\overrightarrow{AC}$. Tìm điều kiện của m và n sao cho vectơ $\vec{v}=\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CM}$ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{BC}$.

Hướng dẫn giải

Trước hết ta có $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. (1)

Ta có $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

Như thế $\vec{v}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=(m-1)\overrightarrow{AB}+(n-1)\overrightarrow{AC}$. (2)

Từ (1) và (2), ta có: $\overrightarrow{BC}$ và $\vec{v}$ cùng phương khi và chỉ khi

$$\frac{m-1}{-1}=\frac{n-1}{1}\Leftrightarrow m+n=2.$$

1.59. Cho hình bình hành ABCD tâm O. Đặt $\overrightarrow{AC}=\vec{a},\overrightarrow{BD}=\vec{b}$

a) Tính các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

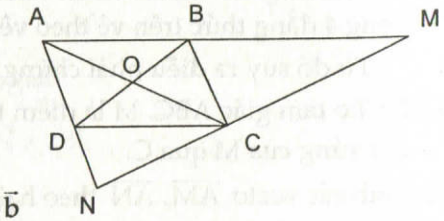
b) Hai điểm M và N lần lượt trên hai đường thẳng AB và AD. Giả sử $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AD}$. Tìm điều kiện của x và y sao cho ba điểm M, N, B thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$



b) Ta có $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}=x\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)=\frac{x}{2}\vec{a}-\frac{x}{2}\vec{b}$

$$\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AD}=y\overrightarrow{BC}=y\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)=\frac{y}{2}\vec{a}+\frac{y}{2}\vec{b}$$

Từ đó $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{y-x}{2}\vec{a} + \frac{y+x}{2}\vec{b}$

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} = \vec{a} - \frac{x}{2}\vec{a} + \frac{x}{2}\vec{b} = \frac{2-x}{2}\vec{a} + \frac{x}{2}\vec{b}$$

Chú ý rằng các vectơ $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AD}$ cùng hướng. Do đó $x, y > 0$. Ba điểm M, N, C thẳng hàng nếu và chỉ nếu $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MC}$ là hai vectơ cùng phương. Như thế ta phải có

$$\frac{x}{2}.\frac{y-x}{2} - \frac{y+x}{2}.\frac{2-x}{2} = 0 \Leftrightarrow xy - x^2 - (2y - xy + 2x - x^2) = 0$$

Hay $xy - x^2 - 2y + xy - 2x + x^2 = 0 \Leftrightarrow xy = x + y$

Vậy điều kiện để M, N, C thẳng hàng là $xy = x + y$.

1.60. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$. Chứng minh rằng các tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Khi đó

$$\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CP} =$$
$$= \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}\right) = \vec{0}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

1.61. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai hình bình hành ABCD và A'B'C'D' có cùng tâm là $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$.

Hướng dẫn giải

Gọi I, I' lần lượt là tâm của hai hình bình hành.

Khi đó $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{I'A'} + \overrightarrow{I'B'} + \overrightarrow{I'C'} + \overrightarrow{I'D'} = \vec{0}$

Ta có $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{II'} + \overrightarrow{I'A'}$; $\quad \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{II'} + \overrightarrow{I'B'}$

$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{II'} + \overrightarrow{I'C'}$; $\quad \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{II'} + \overrightarrow{I'D'}$

Cộng 4 đẳng thức trên vế theo vế, ta được $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = 4\overrightarrow{II'}$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

1.62. Cho tam giác ABC. M là điểm trên cạnh BC sao cho BM = 3MC, N là điểm đối xứng của M qua C.

a) Tính các vectơ $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$.

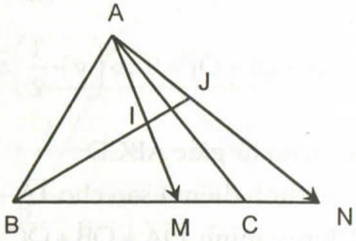
b) Gọi I là trung điểm AM, J là điểm trên AN sao cho $AJ = kAC$. Xác định k để ba điểm B, I, J thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

a) Dễ thấy $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BN} = \frac{5}{4}\overrightarrow{BC}$

Từ đó

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}.$$



$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{5}{4}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$$
$$= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{5}{4}\vec{b}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \frac{5}{4}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AC}$$
$$= -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{5}{4}\vec{b}$$

b) Ta có

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} = \frac{1}{8}\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b}, \quad \overrightarrow{AJ} = k\overrightarrow{AN} = -\frac{k}{4}\vec{a} + \frac{5k}{4}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{8}\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b} - \vec{a} = \frac{-7}{8}\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AB} = \frac{-k}{4}\vec{a} + \frac{5k}{4}\vec{b} - \vec{a} = \frac{-k-4}{4}\vec{a} + \frac{5k}{4}\vec{b}$$

Ba điểm B, I, J thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BJ}$ cùng phương

hay $\frac{-k-4}{4} : \frac{-7}{8} = \frac{5k}{4} : \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{2(k+4)}{7} = \frac{10k}{3} \Leftrightarrow 3k + 12 = 35k \Leftrightarrow k = \frac{3}{8}$.

1.63. Cho hình bình hành ABCD. Hai điểm M và J lần lượt thay đổi trên các cạnh DC và BC với $\overrightarrow{DM} = y\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BJ} = x\overrightarrow{BC}$. Gọi I là trung điểm AD. AM cắt BI tại N.

a) Cho $y = \frac{3}{5}$, tính tỉ số $\frac{BN}{BI}$.

b) Xác định x và y sao cho tâm của hình bình hành ABCD cũng là trọng tâm của tam giác MIJ.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Giả sử $\frac{BN}{BI} = z \Rightarrow \overrightarrow{BN} = z\overrightarrow{BI}$.

Tính được $\overrightarrow{AM} = y\vec{a} + \vec{b}, \overrightarrow{AN} = (1-z)\vec{a} + \frac{z}{2}\vec{b}$

Các vectơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ cùng phương. Suy ra $\dfrac{y}{1-z} = \dfrac{1}{z/2} \Leftrightarrow z(y+2) = 2$

Từ đó với $y = \dfrac{3}{5}$ ta có $z = \dfrac{10}{13}$

b) Gọi O là tâm của hình bình hành. Dễ dàng tính được

$\overrightarrow{OJ} = \dfrac{1}{2}\vec{a} + \left(x - \dfrac{1}{2}\right)\vec{b}$, $\overrightarrow{OM} = \left(y - \dfrac{1}{2}\right)\vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{OI} = -\dfrac{1}{2}\vec{a}$

Nếu O là trọng tâm tam giác MIJ thì

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right)\vec{a} + x\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

1.64. Cho tứ giác ABCD .

a) Xác định điểm I sao cho $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

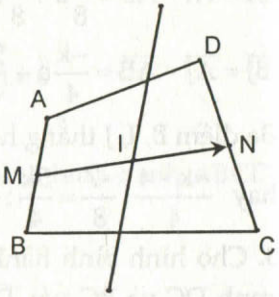
b) Chứng minh $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OI}$ với O là điểm bất kì.

c) Xác định điểm M để $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ có giá trị bé nhất.

d) Tìm tập hợp những điểm N sao cho $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với vectơ

$$\vec{v} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}\ .$$

Hướng dẫn giải



a) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Ta có $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IN}$

Như thế: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IM} + 2\overrightarrow{IN} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ I là trung điểm đoạn MN.

b) Áp dụng quy tắc về hiệu hai vectơ, ta có:

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OI} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OI}$ với mọi O.

c) Áp dụng kết quả câu b) ta có:

$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = 4|\overrightarrow{MI}| = 4MI.$

Do đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ đạt giá trị bé nhất $\Leftrightarrow$ MI = 0.

Vậy $M \equiv I$ thì $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ đạt giá trị bé nhất.

d) Áp dụng kết quả câu b), ta có: $\vec{v} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = 4\overrightarrow{NI}$.

Như vậy, $\vec{v}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{NI}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$ NI song song với AB.

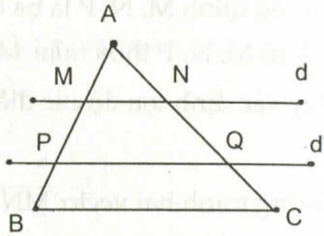
Như thế tập hợp những điểm N sao cho $\vec{v}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ là đường thẳng qua I và song song với AB.

1.65. Cho tam giác ABC. Cho d, d' là hai đường thẳng phân biệt thay đổi nhưng luôn song song với BC. Biết d cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại M, N ; d' cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q.

Chứng minh vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PN}$ có hướng không đổi.

Hướng dẫn giải

Ta có $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = k$ và $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AQ}{AC} = l$ với $0 \le k, l \le 1$.



Từ đó

$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC},$

$\overrightarrow{AP} = l\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AQ} = l\overrightarrow{AC}$

Ta có $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AM} = l\overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{AB}$

và $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AC} - l\overrightarrow{AB}$

Như thế

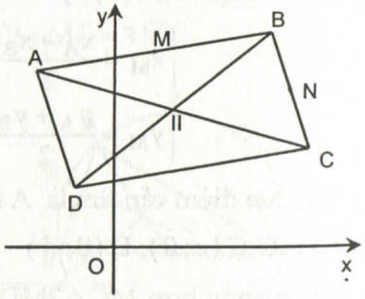
$\vec{v} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PN} = l\overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC} - l\overrightarrow{AB}$

$= (k+l)\overrightarrow{AC} - (k+l)\overrightarrow{AB} = (k+l)\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = (k+l)\overrightarrow{BC}.$

Vậy $\vec{v}$ luôn cùng hướng với $\overrightarrow{BC}$.

1.66. Cho hình bình hành ABCD có trung điểm AB là M(1;5), trung điểm BC là $N\left(\dfrac{9}{2};4\right)$, trung điểm cạnh CD là P(2;2). Hãy xác định tọa độ các đỉnh A, B, C, D.

Hướng dẫn giải



Cho A(x; y) . Vì M là trung điểm AB nên

$$\begin{cases} x_B = 2x_M - x_A = 2 - x \\ y_B = 2y_M - y_A = 10 - y \end{cases} \Rightarrow B(2-x; 10-y)$$

Vì N là trung điểm BC nên

$$\begin{cases} x_C = 2x_N - x_B = 7 + x \\ y_C = 2y_N - y_A = y - 2 \end{cases} \Rightarrow C(7+x; -2+y)$$

Gọi I là giao điểm hai đường chéo hình bình hành.

I là trung điểm AC nên $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{7+2x}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_C}{2} = -1 + y \end{cases}$

I cũng là trung điểm MP nên $I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{7}{2}\right)$.

Từ đó ta có $\begin{cases}\dfrac{7+2x}{2}=\dfrac{3}{2}\\ -1+y=\dfrac{7}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=\dfrac{9}{2}\end{cases}$

Vậy tọa độ các điểm là $A\left(-2;\frac{9}{2}\right), B\left(4;\frac{11}{2}\right), C\left(5;\frac{5}{2}\right), D\left(-1;\frac{3}{2}\right)$.

1.67. Cho các điểm $M(-2;3)$, $N(0;4)$, $P(-4;1)$.

a) Chứng minh M, N, P là ba đỉnh một tam giác.

b) Giả sử M, N, P thoả mãn $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{NB}=-2\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PA}$.

Hãy xác định tọa độ các điểm A, B, C.

Hướng dẫn giải

a) Chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ không cùng phương.

b) $A\left(-\frac{3}{4};\frac{8}{5}\right), B\left(-\frac{13}{4};\frac{38}{5}\right), C\left(\frac{13}{8};\frac{11}{5}\right)$.

1.68. Cho điểm $M(2;3)$.

a) Tìm hai điểm A, B lần lượt nằm trên trục Ox, Oy sao cho M là trung điểm đoạn AB.

b) Tìm hai điểm C, D lần lượt nằm trên trục Ox, Oy sao cho M, C, D thẳng hàng và MC = 2MD.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử $A(a;0), B(0;b)$. Vì M là trung điểm của đoạn AB nên

$$\begin{cases}x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}\\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\ b=6.\end{cases}$$

Vậy hai điểm cần tìm là $A(4;0), B(0;6)$.

b) Giả sử $C(c;0), D(0;d)$

- Xét trường hợp $\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MD}$

Ta có $\overrightarrow{MC}=(c-2;-3), \overrightarrow{MD}=(-2;d-3)$

Như thế $\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MD}\Leftrightarrow\begin{cases}c-2=-4\\ -3=2(d-3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-2\\ d=\dfrac{3}{2}\end{cases}$

Vậy hai điểm cần tìm là $C(-2;0), D\left(0;\frac{3}{2}\right)$

- Xét trường hợp $\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MD}$

Thực hiện như trên ta được hai điểm $C(6;0), D\left(0;\frac{9}{2}\right)$.

1.69. Trong mp Oxy cho hình bình hành ABCD với A(1;3), D(5;2), cạnh BC qua điểm $M\left(\frac{3}{2};-1\right)$. Biết tâm của hình bình hành nằm trên trục hoành. Hãy tìm tọa độ các điểm B và C.

Hướng dẫn giải

- Gọi I là tâm hình bình hành. Khi đó I(a;0). Gọi N là điểm đối xứng của M qua I. Ta có N thuộc cạnh AD và $N\left(2a-\frac{3}{2};1\right)$.

Ta tính được các vectơ $\overrightarrow{AD}=(4;-1), \overrightarrow{AN}=\left(2a-\frac{5}{2};-2\right)$.

Vì hai vectơ $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AD}$ cùng phương nên $4(-2)=\left(2a-\frac{5}{2}\right)(-1)\Rightarrow a=\frac{21}{4}$

Từ đó ta tìm được tâm $I\left(\frac{21}{4};0\right)$.

Do tính đối xứng nên dễ dàng tính được $C\left(\frac{19}{2};-3\right), B\left(\frac{11}{2};-2\right)$.

1.70. Cho tam giác ABC. Xác định vị trí điểm M trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC để $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ có giá trị bé nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm của ΔABC, ta có : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Suy ra $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|=3|\overrightarrow{MG}|=3MG$.

Ta có : $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ có giá trị bé nhất

⇔ MG có giá trị bé nhất.

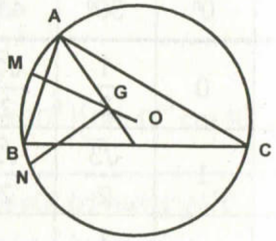
M chính là giao điểm của đường thẳng OG với đường tròn (O) ngoại tiếp của ΔABC.

Thật vậy, với N bất kì, N ≠ M, ta có :

OM = ON < OG + GN

⇔ OG + GM < OG + GN, do đó GM < GN

Điểm M được xác định như trên hình vẽ.



Chương 2

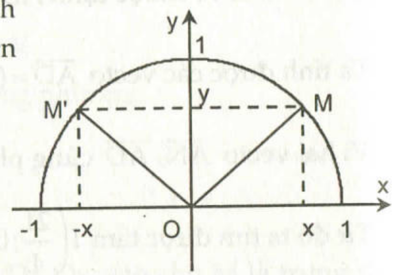
TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

§1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KÌ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa

Với mỗi góc α $(0^0 \le \alpha \le 180^0)$, ta xác định một điểm $M(x\,;\,y)$ trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{MOx} = \alpha$.



Khi đó

$\sin\alpha = y\,, \quad \cos\alpha = x\,,$

$\tan\alpha = \dfrac{y}{x}\ (x \ne 0), \quad \cot\alpha = \dfrac{x}{y}\ (y \ne 0).$

Các số $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của góc α.

- Tính chất : Với hai góc bù nhau là α và $180^0 - \alpha$ ta có :

$\sin(180^o - \alpha) = \sin\alpha\ ; \quad \cos(180^o - \alpha) = -\cos\alpha\,;$

$\tan(180^o - \alpha) = -\tan\alpha \quad (\alpha \ne 90^0)\ ;$

$\cot(180^o - \alpha) = -\cot\alpha \quad (0^0 < \alpha < 180^0).$

2. Giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt

Góc	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	||	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cot	||	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	||

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính các giá trị lượng giác

- *Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác.*
- *Sử dụng mối quan hệ giữa hai góc phụ nhau, bù nhau.*

Bài 1. Tính:

$A = 2\cos 30^0 + \sin 150^0 + \tan 135^0\,;$

$B = \tan^2 120^0 + \cot 30^0 - 2\sin 120^0 + \sin 180^0 + 4\cos 90^0 + 2\cos 120^0.$

Giải.

$$A = 2\cos 30^0 + \sin 150^0 + \tan 135^0 = 2.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - 1 = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$$

$$B = \tan^2 120^0 + \cot 30^0 - 2\sin 120^0 + \sin 180^0 + 4\cos 90^0 + 2\cos 120^0$$

$$= \left(\sqrt{3}\right)^2 + \sqrt{3} - 2.\frac{\sqrt{3}}{2} + 0 + 4.0 - 2.\frac{1}{2} = 2.$$

Bài 2. Tính giá trị các biểu thức sau đây :

$S = \cos 12^0 + \cos 36^0 + \cos 60^0 + \cos 84^0 + \cos 96^0 + \cos 120^0 + \cos 144^0 + \cos 168^0$

$P = \tan 10^0 \tan 20^0 \tan 30^0 \tan 40^0 \tan 50^0 \tan 60^0 \tan 70^0 \tan 80^0.$

Giải.

- Sử dụng quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau :

$$\cos 12^0 + \cos 168^0 = \cos 36^0 + \cos 144^0 = \cos 60^0 + \cos 120^0$$
$$= \cos 84^0 + \cos 96^0 = 0$$

Do đó $S = 0$.

- Ta có: $\tan 80^0 = \cot 10^0,\ \tan 70^0 = \cot 20^0,$
$\tan 60^0 = \cot 30^0,\ \tan 50^0 = \cot 40^0.$

Từ đó:

$$P = \left(\tan 10^0 \cot 10^0\right)\left(\tan 20^0 \cot 20^0\right)\left(\tan 30^0 \cot 30^0\right)\left(\tan 40^0 \cot 40^0\right) = 1.$$

Dạng 2. Chứng minh hệ thức liên quan đến giá trị lượng giác.

- *Sử dụng định nghĩa hình học của các giá trị lượng giác.*
- *Áp dụng các hằng đẳng thức.*

Bài 3. Chứng minh các hệ thức sau đây :

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\,;$

b) $\cos\alpha + \sin\alpha\tan\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ với $\alpha \ne 90^0\,;$

c) $\cot^2 x.\cos^2 x = \cot^2 x - \cos^2 x$;

d) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x.\cos^2 x$.

Giải.

a) Ta đã biết $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, với α là góc nhọn.

Sử dụng mối liên hệ giữa hai góc bù nhau ta dễ dàng suy ra kết quả.

b) Ta có $\cos\alpha + \sin\alpha\tan\alpha = \cos\alpha + \sin\alpha.\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

c) $\cot^2 x.\cos^2 x = \cot^2 x(1 - \sin^2 x) = \cot^2 x - \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}.\sin^2 x = \cot^2 x - \cos^2 x$.

d)

+ **Cách 1 :** Ta có $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$

hay $\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x.\cos^2 x = 1$.

Vậy $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x.\cos^2 x$.

+ **Cách 2 :** Áp dụng hằng đẳng thức $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$, ta có

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x.\cos^2 x$$
$$= 1 - 2\sin^2 x.\cos^2 x.$$

C. LUYỆN TẬP

- **Tính các giá trị lượng giác**

2.1. Tính giá trị của các biểu thức

a) $A = \left(2\sin 45^o + 2\cos 135^o + \cot 45^o\right)\left(\sin 180^o + 3\cos 180^o + \cos 90^o\right)$;

b) $B = \cos 35^o + \cos 47^o + \cos 78^o + \cos 145^o + \cos 133^o + \cos 102^o$;

c) $C = \dfrac{2\cos 0^o - 3\sin 0^o + \tan 45^o}{2\cos 180^o - 3\sin 180^o}$;

d) $D = \dfrac{\sin a\cos b + \tan c}{\sin(a+b) + \cos(a+b) + \cot c}$ với $a = 60^o$, $b = 30^o$, $c = 45^o$.

Hướng dẫn giải

a) $A = -3$. b) $B = 0$. c) $C = -\dfrac{3}{2}$. d) $D = \dfrac{7}{8}$.

2.2. Tính các biểu thức sau đây:

a) $A = \cos^2 22^0 + \cos^2 23^0 + \cos^2 41^0 + \cos^2 49^0 + \cos^2 68^0 + \cos^2 67^0$;

b) $B = \tan 1^0 \tan 2^0 \ldots \tan 88^0 \tan 89^0$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\cos 49^0 = \sin 41^0$, $\cos 67^0 = \sin 23^0$, $\cos 68^0 = \sin 22^0$

Do đó: $A = \cos^2 22^0 + \sin^2 22^0 + \cos^2 23^0 + \sin^2 23^0 + \cos^2 41^0 + \sin^2 41^0 = 3$

b) Ta có: $B = (\tan 1^0 \tan 89^0).(\tan 2^0 \tan 88^0)\ldots(\tan 44^0 \tan 46^0).\tan 45^0 = 1$.

2.3.

a) Cho $\cos x = -\dfrac{3}{5}$. Tính sinx, tanx, cotx .

b) Cho $\tan x = 4$ ($0^0 < x < 90^0$). Tính $\sin x, \cos x$.

c) Cho $\cot x = -2$ ($90^0 < x < 180^0$). Tính $\sin x, \cos x$.

Hướng dẫn giải

a) Vì ta xét $0^0 \le x \le 180^0$ nên $\cos x = -\dfrac{3}{5}$ khi $90^0 < x < 180^0$. Do đó

tanx và cotx là các số âm ; $\sin x > 0$.

Ta có: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - (-\dfrac{3}{5})^2 = \dfrac{16}{25}$.

Vậy $\sin x = \sqrt{\dfrac{16}{25}} = \dfrac{4}{5}$, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\dfrac{4}{3}$, $\cot x = \dfrac{1}{\tan x} = -\dfrac{3}{4}$.

b) $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$, $\sin x = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$.

c) $\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos x = \dfrac{-\sqrt{6}}{3}$.

2.4. a) Cho $\tan x + \cot x = m$. Tính $\tan^2 x + \cot^2 x$, $\tan^3 x + \cot^3 x$.

b) $B = \dfrac{3\sin x + 2\cos x}{5\sin x - \cos x}$, biết $\tan x = 4$;

c) $C = 2\sin^4 x + 4\cos^6 x$, biết $5\sin^4 x + 3\cos^4 x = 2$.

Hướng dẫn giải

a) • $m^2 = (\tan x + \cot x)^2 = \tan^2 x + \cot^2 x - 2\tan x.\cot x = \tan^2 x + \cot^2 x - 2$

Từ đó $\tan^2 x + \cot^2 x = m^2 - 2$.

• $\tan^3 x + \cot^3 x = (\tan x + \cot x)(\tan^2 x - \tan x.\cot x + \cot^2 x) = m(m^2 - 2 - 1)$

hay $\tan^3 x + \cot^3 x = m(m^2 - 3)$.

b) Ta có : $\tan x = 4 \Rightarrow \cos x \ne 0$ nên :

$$B = \frac{3\sin x + 2\cos x}{5\sin x - \cos x} = \frac{\cos x(3\tan x + 2)}{\cos x(5\tan x - 1)} = \frac{3\tan x + 2}{5\tan x - 1} = \frac{3.4 + 2}{5.4 - 1} = \frac{14}{19}.$$

c) Đặt $t = \sin^2 x$, ta có $\cos^2 x = 1 - t$. Do đó :

$5\sin^4 x + 3\cos^4 x = 2 \Leftrightarrow 5t^2 + 3(1 - t)^2 = 2 \Leftrightarrow 8t^2 - 6t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$ hoặc $t = \dfrac{1}{4}$.

- $t = \sin^2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, ta có : $A = 2\sin^4x + 4\cos^6x = 1$.
- $t = \sin^2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2x = \frac{3}{4}$, ta có $C = 2\sin^4x + 4\cos^6x = \frac{29}{16}$.
- **Chứng minh các hệ thức lượng giác đơn giản**

2.5. Rút gọn các biểu thức sau đây

a) $A = \sin^2 x + \sin^2 x\cos^2 x + \cos^2 x$;

b) $B = \sin x\cos x(\tan x + \cot x)$;

c) $C = 2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x)$.

Hướng dẫn giải

a) Áp dụng hệ thức $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ta có

$$A = \sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + \cos^2 x$$
$$= \sin^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

b) $B = \sin x\cos x(\tan x + \cot x) = \sin x\cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

c) Áp dụng $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ và $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

$\Rightarrow \sin^6x + \cos^6x = 1 - 3\sin^2x\cos^2x$ và $\sin^4x + \cos^4x = 1 - 2\sin^2\cos^2x$

Thay vào C ta suy được $C = -1$.

2.6. Chứng minh các đẳng thức (với điều kiện đẳng thức có nghĩa)

a) $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$; b) $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$; c) $\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$.

Hướng dẫn giải

a) $1 + \tan^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

b) $1 + \cot^2x = 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$.

c) Ta có $1 + \cot^2x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \sin^2x = \frac{1}{1 + \cot^2 x}$.

Mà $\cot x = \frac{1}{\tan x}$, do đó $\sin^2x = \frac{1}{1 + \frac{1}{\tan^2 x}} = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$.

2.7. Chứng minh các đẳng thức (với điều kiện đẳng thức có nghĩa)

a) $\frac{\cos a}{1 + \sin a} + \tan a = \frac{1}{\cos a}$ $(a \neq 90^0)$;

b) $1 + \sin a + \cos a + \tan a = (1 + \cos a)(1 + \tan a)$ $(a \neq 90^0)$;

c) $\frac{1}{\sin^2 a} + \frac{\cot a}{\sin a} = \frac{1}{1 - \cos a}$.

Hướng dẫn giải

a) Biến đổi vế trái

$$\frac{\cos a}{1 + \sin a} + \tan a = \frac{\cos a}{1 + \text{sima}} + \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\cos^2 a + \sin^2 a + \sin a}{(1 + \sin a)\cos a}.$$
$$= \frac{1 + \sin a}{(1 + \sin a)\cos a} = \frac{1}{\cos a}(a \neq 90^0)$$

b) $1 + \sin a + \cos a + \tan a = 1 + \cos a + \sin a\left(1 + \frac{1}{\cos a}\right)$

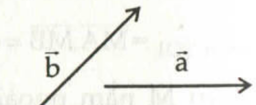
$$= (1 + \cos a)\left(1 + \frac{\sin a}{\cos a}\right) = (1 + \cos a)(1 + \tan a)\ (a \neq 90^0).$$

c) $\frac{1}{\sin^2 a} + \frac{\cot a}{\sin a} = \frac{1 + \cos a}{\sin^2 a} = \frac{1 + \cos a}{1 - \cos^2 a} = \frac{1}{1 - \cos a}$.

§2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

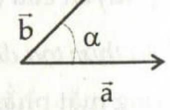
1. Góc giữa hai vectơ



- Cho hai vectơ $\vec a$ và $\vec b$ khác vectơ $\vec 0$.

Từ điểm O bất kì, ta vẽ các vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec a$ và $\overrightarrow{OB} = \vec b$.

Khi đó $\widehat{AOB}$ được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec a$ và $\vec b$, kí hiệu là $(\vec a, \vec b)$.



- $(\vec a, \vec b) = 90^0 \Leftrightarrow \vec a \perp \vec b$.

2. Định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec a$ và $\vec b$ là một số, kí hiệu là $\vec a.\vec b$, được xác định bởi công thức

$\vec a.\vec b = |\vec a|\,|\vec b|\cos(\vec a, \vec b)$.

3. Tính chất của tích vô hướng :

- Với mọi vectơ $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ và mọi số thực k, ta có:

1) $\vec a.\vec b = \vec b.\vec a$ (Tính chất giao hoán) ;

2) $(k\vec a)\vec b = k(\vec a\vec b)$;

3) $\vec{a}.\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ (Tính chất phân phối đối với phép cộng) ;

$\vec{a}.\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\vec{a}.\vec{b}-\vec{a}.\vec{c}$ (Tính chất phân phối đối với phép trừ) ;

4) $\vec{a}.\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$.

5) *Bình phương vô hướng:* Bình phương vô hướng của một vectơ bằng bình phương độ dài của vectơ đó : $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

- Các hằng đẳng thức về bình phương vô hướng :

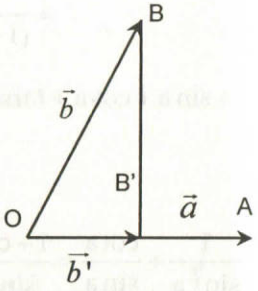
  $(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2$; $(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2$;

  $\vec{a}^2-\vec{b}^2=(\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})$.

6) *Công thức hình chiếu :*

Cho $\overline{OA}=\vec{a}$, $\overline{OB}=\vec{b}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng tích vô hướng của $\vec{a}$ với $\overline{OB'}=\vec{b'}$ là hình chiếu của $\vec{b}$ lên $\vec{a}$:

$\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{b'}$ hay $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB'}$.



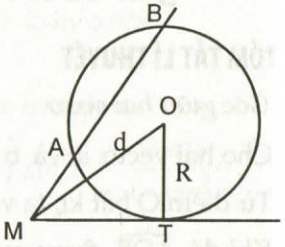
- *Chú ý:* Cho đường tròn (O) và một điểm M.

  Dựng cát tuyến MAB với (O), ta định nghĩa:

  Phương tích của điểm M đối với đường tròn (O), kí hiệu là $P_{M/(O)}$ là số được xác định bởi biểu thức:

  $P_{M/(O)}=\overline{MA}.\overline{MB}=d^2-R^2$ $(d=MO)$;

  Nếu M nằm ngoài đường tròn (O) và MT là tiếp tuyến của (O) thì $P_{M/(O)}=\overrightarrow{MT}^2=MT^2$.



4. ***Biểu thức tọa độ của tích vô hướng***

Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{a}=(x;y)$ và $\vec{b}=(x';y')$. Khi đó :

(1) $\vec{a}.\vec{b}=xx'+yy'$;

(2) $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$;

(3) $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$ $(\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0})$;

(4) Khoảng cách giữa hai điểm $M(x_M; y_M)$ và $N(x_N; y_N)$:

$$MN=|\overline{MN}|=\sqrt{(x_N-x_M)^2+(y_N-y_M)^2};$$

(5) $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow xx'+yy'=0$.

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính tích vô hướng của hai vectơ.

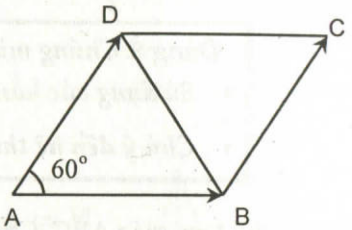
- *Áp dụng định nghĩa.*
- *Áp dụng công thức hình chiếu.*

Bài 4. Cho hình thoi ABCD cạnh a và góc $A=60^o$. Tính các tích vô hướng sau đây: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.

Giải

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có tam giác ABD cân và $\widehat{A}=60^o$ nên nó là tam giác đều.



$BD=a, OB=OD=\dfrac{a}{2}$,

$OA=OC=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}, AC=a\sqrt{3}$

Từ đó, theo định nghĩa tích vô hướng, ta có:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos60^o=a.a.\dfrac{1}{2}=\dfrac{a^2}{2}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\dfrac{a^2}{2}$ (vì $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$)

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CA}=\left|\overrightarrow{AD}\right|\left|\overrightarrow{CA}\right|\cos150^o=a.a\sqrt{3}.\dfrac{-\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{3a^2}{2}$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DC}=\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{DC}\right|\cos30^o=a.\sqrt{3}.a.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3a^2}{2}$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|\cos90^o=0$.

Bài 5. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Cho biết $\left|\vec{a}\right|=6, \left|\vec{b}\right|=3, \left(\vec{a},\vec{b}\right)=45^o$.

Hãy tính các tích vô hướng $\vec{a}\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$, $\left(3\vec{a}+4\vec{b}\right)\left(-2\vec{a}+3\vec{b}\right)$.

Giải.

Trước hết ta có: $\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|^2=36$, $\vec{b}^2=\left|\vec{b}\right|^2=9$, $\vec{a}\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos45^o=6.3.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=9\sqrt{2}$.

Vậy:

- $\vec{a}\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)=2\vec{a}^2-\vec{a}\vec{b}=2.36-9\sqrt{2}=72-9\sqrt{2}$
- $\left(3\vec{a}+4\vec{b}\right)\left(-2\vec{a}+3\vec{b}\right)=-6\vec{a}^2+12\vec{b}^2+\vec{a}\vec{b}=-6.36+12.9-9\sqrt{2}=-108-9\sqrt{2}$.

Bài 6. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính giá trị của biểu thức

$$F=\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}\right).$$

Giải.

Khai triển biểu thức, ta được

$$F=\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AB}^2-3\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-6\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$$

Chú ý rằng: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\dfrac{a^2}{2},\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2},\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{a^2}{2}$

Từ đó $F=a^2+\dfrac{3a^2}{2}+a^2-3a^2=\dfrac{a^2}{2}$.

> ***Dạng 2. Chứng minh hệ thức liên quan đến tích vô hướng.***
>
> - *Sử dụng các hằng đẳng thức về tích vô hướng.*
> - *Chú ý đến hệ thức* $\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|^2$.

Bài 7. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$; b) $\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB.AC}$.

Giải.

a) Ta có $BC^2=\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2=\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}^2$.

Từ đó ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

b) Từ kết quả trên, ta có

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos A=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)\Rightarrow\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB.AC}.$$

Chú ý.

1. *Cách viết* $BC^2=\overrightarrow{BC}^2$ *hay được sử dụng trong việc xử lí các bình phương độ dài.*
2. *Từ bài toán trên ta thấy rằng nếu biết độ dài ba cạnh của tam giác ABC thì ta hoàn toàn tính được các tích vô hướng* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ *và từ đó suy ra được độ lớn của ba góc.*

Bài 8. Cho hình bình hành ABCD.

Chứng minh rằng $AC^2+BD^2=2(AB^2+AD^2)$.

Giải.

Ta có: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\Rightarrow AC^2=AB^2+AD^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$;

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\Rightarrow BD^2=AB^2+AD^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

Cộng hai đẳng thức trên vế theo vế, ta được đẳng thức cần chứng minh.

> ***Dạng 3. Chứng minh hai vectơ vuông góc.***
>
> *Dựa vào tính chất của tích vô hướng* $\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$.

Bài 9. Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}=0$.

b) Dựa vào kết quả trên, chứng minh rằng trong một tam giác thì ba đường cao đồng quy.

Giải.

a) Áp dụng quy tắc về hiệu vectơ, ta có:

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB})=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ (1)

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{MB}.(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC})=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$ (2)

$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MC}.(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA})=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ (3)

Cộng (1), (2), (3) vế theo vế, ta được

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}=0$. (*)

b) Cho hai đường cao AA′ và BB′ của ΔABC cắt nhau tại H.

Theo kết quả (*) câu a) ta có

$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB}=0$ (4);

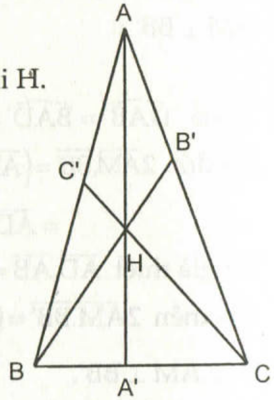
Vì $AH\perp BC$ và $BH\perp AC$ nên

$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}=0,\ \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA}=0$ (5).

Từ (4) và (5) ta thu được

$\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB}=0$ hay $CH\perp AB$.

Nói cách khác ba đường cao của ΔABC đồng quy tại H.



Bài 10. Cho tam giác ABC có đường cao AH và $AB^2-BH^2=\overline{CH}.\overline{BH}$.

Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A.

Giải.

Ta có $AB^2-BH^2=\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{BH}\Leftrightarrow AB^2=\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{BH}^2=\overrightarrow{BH}\left(\overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HB}\right)=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}$

$$\begin{aligned}\text{Từ đó: }\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}&=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}\right)=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AH}=0\end{aligned}$$

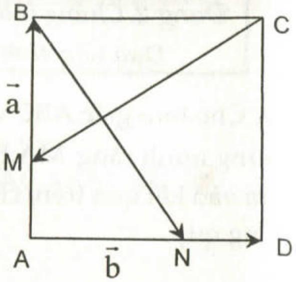
Vậy $AB\perp AC$ (đpcm).

Bài 11. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 1. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Gọi M, N là hai điểm trên hai cạnh AB, AD sao cho $AM=DN=\dfrac{1}{3}$.

a) Tính $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{BN}$ theo các vectơ $\vec{a},\vec{b}$.

b) Tính $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BN}$. Suy ra $CM\perp BN$.

Giải



a) $BM = \frac{2}{3}AB \Rightarrow \overrightarrow{BM} = -\frac{2}{3}\vec{a}$, $\overrightarrow{ND} = \frac{1}{3}\vec{b}$

- $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = -\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$
- $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

b) Ta có $\vec{a}\vec{b} = 0$.

Do đó $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BN} = \left(-\frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b}\right)\left(-\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) = \frac{2}{3}\vec{a}^2 - \frac{2}{3}\vec{b}^2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$

Từ đây suy ra $CM \perp BN$.

Bài 12. Cho tam giác ADD′ có $\widehat{DAD'} > 90^0$. Dựng ngoài tam giác ADD′ hai hình vuông ABCD và AB'C'D'. Gọi M là trung điểm DD′. Chứng minh rằng

a) $AM \perp BB'$; b) $2AM = BB'$.

Giải.

a) Ta có $\widehat{DAB'} = \widehat{BAD'} = \widehat{BAB'} + 90^0$, suy ra $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD'}$

Do đó: $2\overrightarrow{AM}\overrightarrow{BB'} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD'}\right)\left(\overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AB}\right)$

$$= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{AB}$$

Từ giả thiết $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{AB'} = 0$.

Cho nên $2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BB'} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD'}\right)\left(\overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{AB} = 0$.

Vậy $AM \perp BB'$.

b) Ta có $\widehat{BAB'} + \widehat{DAD'} = 180^0 \Rightarrow \cos\widehat{BAB'} = -\cos\widehat{DAD'}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB'} = -\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD'}$. Do đó :

$$4\left|\overrightarrow{AM}\right|^2 = 4\overrightarrow{AM}^2 = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD'}\right)^2 = \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 + 2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD'} + \left|\overrightarrow{AD'}\right|^2$$

$$= \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB'} + \left|\overrightarrow{AB'}\right|^2 = \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB'}\right)^2 = \overrightarrow{BB'}^2.$$

Nghĩa là $2AM = BB'$.

Dạng 4. Tìm tập hợp điểm.

Bài 13. Cho tam giác ABC, tìm tập hợp những điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$; b) $\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$.

Giải.

a) Gọi I là trung điểm đoạn BC. Khi đó $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$.

Ta có $\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow MA \perp MI$.

Vậy tập hợp những điểm M là đường tròn đường kính AI.

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Ta có $\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}.3\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow CA \perp MG$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng qua G và vuông góc với AC.

Bài 14. Cho hai điểm A, B và k là một số không đổi. Tìm tập hợp những điểm M trong mỗi trường trường hợp sau :

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$; b) $MA^2 - MB^2 = k$.

Giải.

a) Gọi O là trung điểm AB. Đặt AB = a. Ta có

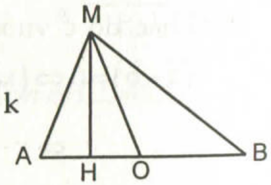
$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right) = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}\right) = MO^2 - \frac{a^2}{4}$$

Từ đó $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow MO^2 - \frac{a^2}{4} = k \Leftrightarrow MO^2 = k + \frac{a^2}{4}$.

- Nếu $k > -\frac{a^2}{4}$ thì $MO = \sqrt{k + \frac{a^2}{4}}$

  Tập hợp M là đường tròn tâm O, bán kính $\sqrt{k + \frac{a^2}{4}}$.

- Nếu $k = -\frac{a^2}{4}$ thì M trùng với điểm O.
- Nếu $k < -\frac{a^2}{4}$ thì tập hợp M là tập rỗng.



b) Gọi H là hình chiếu của M trên AB, O là trung điểm của AB. Ta có

$$MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = k$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OH} = k. \quad (*)$$

Vì A, B, O cố định nên (*) cho ta H cố định.

Vậy tập hợp các điểm M cần tìm là đường thẳng Δ vuông góc với AB tại H.

Chú ý. Ở câu b) ta đã áp dụng một tính chất của tích vô hướng: Với hai vectơ $\overline{AB}$ và $\overline{CD}$ cùng nằm trên trục (O; $\vec{i}$) thì

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = (\overline{AB}.\vec{i}).(\overline{CD}.\vec{i}) = \overline{AB}.\overline{CD}.\vec{i}^2 = \overline{AB}.\overline{CD}.$$

Dạng 5. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng.

Sử dụng các công thức về tọa độ điểm , vectơ , độ dài vectơ , góc giữa hai vecto

Bài 15. Cho các vectơ $\vec{a}=(3;2),\vec{b}=(-4;7)$.

a) Xác định toạ độ và độ dài của các vectơ $2\vec{a}+3\vec{b}$

b) Tính cosin của góc giữa hai vectơ $2\vec{a}$ và $3\vec{b}$.

Giải.

a) Ta có $2\vec{a}=(6;4),3\vec{b}=(-12;21)$.

Từ đó $2\vec{a}+3\vec{b}=(-6;25)$. Suy ra $\left|2\vec{a}+3\vec{b}\right|=\sqrt{6^2+25^2}=\sqrt{661}$

b) Gọi α là góc giữa hai vectơ $2\vec{a}$ và $3\vec{b}$. Ta có

$$\cos\alpha=\frac{2\vec{a}.3\vec{b}}{|2\vec{a}|.|3\vec{b}|}=\frac{6(-12)+4.21}{\sqrt{36+16}.\sqrt{144+441}}=\frac{12}{78\sqrt{5}}=\frac{2}{13\sqrt{5}}.$$

Bài 16. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thoả mãn $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,|4\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{13}$.

a) Tính $(\vec{a},\vec{b})$.

b) Xác định các số x và y sao cho vectơ $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ có độ dài bằng 1 và $\vec{c}$ vuông góc với vectơ $\vec{a}-\vec{b}$.

Giải

a) Ta có $13=\left(4\vec{a}-3\vec{b}\right)^2=16\vec{a}^2+9\vec{b}^2-24\vec{a}\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\vec{b}=\dfrac{1}{2}$

Mà $\vec{a}\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)\Rightarrow\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=60^0$

b) Ta có $\vec{c}^2=\left(x\vec{a}+y\vec{b}\right)^2=x^2\vec{a}^2+y^2\vec{b}^2+2xy\vec{a}.\vec{b}=x^2+y^2+xy$

Mặt khác, do $\vec{c}$ vuông góc với vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ nên

$$\vec{c}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow\left(x\vec{a}+y\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow x\vec{a}^2-y\vec{b}^2+(y-x)\vec{a}\vec{b}=0$$

$$\Leftrightarrow x-y+\frac{y-x}{2}=0\Leftrightarrow\frac{x-y}{2}=0\Leftrightarrow x=y$$

Từ đó $\vec{c}^2=x^2+y^2+xy=1\Rightarrow 3x^2=1\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Vậy đáp số của bài toán là $(x,y)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Bài 17. Cho tam giác ABC có A(–3;2), B(4;–1), C(–2;5).

a) Tìm toạ độ các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ và tính cosA của tam giác ABC. Suy ra diện tích tam giác ABC.

b) Tìm toạ độ vectơ $\vec{v}$ sao cho $|\vec{v}|=1$ và $\vec{v}$ vuông góc với $\vec{u}$ sau :

$$\vec{u}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{CA}.$$

Giải.

a) Ta có : $\overrightarrow{AB}=(7;-3),\overrightarrow{AC}=(1;3)$.

Từ đó: $\cos A=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{7.1+3(-3)}{\sqrt{49+9}.\sqrt{1+9}}=\dfrac{-2}{\sqrt{580}}=\dfrac{-1}{\sqrt{145}}$.

Áp dụng hệ thức $\sin^2A+\cos^2A=1$ ta được (chú ý rằng $\sin A>0$).

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\sqrt{1-\frac{1}{145}}=\frac{12}{\sqrt{145}}$$

Từ đó $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin A=\dfrac{1}{2}\sqrt{58}.\sqrt{10}.\dfrac{12}{\sqrt{145}}=12$.

b) Ta có $\overrightarrow{BC}=(-6;6)$.

Suy ra $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{CA}=(28;-36)$.

Giả sử $\vec{v}=(x;y)$.

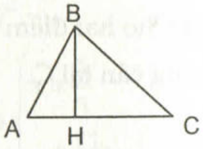
Vì $\left|\vec{v}\right|=1$ nên $\sqrt{x^2+y^2}=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1$

Mặt khác $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow 28x-36y=0\Leftrightarrow x=\dfrac{9}{7}y$.

Từ đó: $x^2+y^2=1\Leftrightarrow\dfrac{81}{49}y^2+y^2=1\Leftrightarrow\dfrac{130}{49}y^2=1\Leftrightarrow y=\pm\dfrac{7}{\sqrt{130}}$.

Ta có hai vectơ thoả mãn yêu cầu bài toán

$$\overrightarrow{v_1}=\left(\frac{9}{\sqrt{130}};\frac{7}{\sqrt{130}}\right),\overrightarrow{v_2}=\left(-\frac{9}{\sqrt{130}};-\frac{7}{\sqrt{130}}\right).$$



Chú ý : Ở câu a) trong bài trên ta tính được diện tích ΔABC theo công thức:

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC\sin A$. *Thật vậy* $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}BH.AC$ *(với $BH\perp AC$).*

Mà ΔABH vuông tại H $\Rightarrow BH=AB\sin A$ *nên*

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC\sin A.$$

Dạng 6. Tìm tọa độ điểm thoả mãn điều kiện cho trước

- ***Xác định đặc trưng hình học của điểm cần tìm. Sau đó chuyển sang các ràng buộc về tọa độ.***
- ***Sử dụng điều kiện cùng phương của hai vectơ, công thức tính góc.***
- ***Chú ý các tính chất một số điểm đặc biệt trong tam giác ABC***

+ ***Trọng tâm G:*** $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}\Rightarrow G\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$;

+ *Trực tâm H* : $\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA}=0\end{cases}$;

+ *Tâm đường tròn ngoại tiếp I: IA = IB = IC.*

Bài 18. Cho A(–1 ; 2), B(3 ; 1).

a) Tìm điểm M trên trục hoành sao cho MA = MB.

b) Tìm điểm N trên trục tung sao cho A, B, N thẳng hàng.

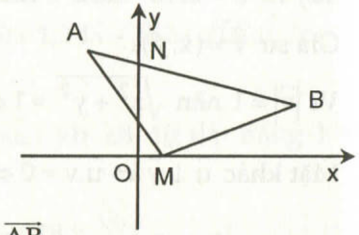
Giải.

a) Vì M nằm trên trục hoành nên M(x ; 0). Ta có $MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(0-2)^2=(x-3)^2+(0-1)^2 \Leftrightarrow x^2+2x+1+4=x^2-6x+9+1$

$\Leftrightarrow 8x=5 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{8}$.

Vậy $M\left(\dfrac{5}{8};0\right)$.



b) Cho N(0 ; y) thuộc trục tung.

Ta có $\overrightarrow{AN}=(1;y-2), \overrightarrow{AB}=(4;-1)$.

A, N, B thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AN}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow 1.(-1)-4(y-2)=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{7}{4}$. Vậy $N\left(0;\dfrac{7}{4}\right)$.

Bài 19. Cho hai điểm $A(7;26)$ và $B(12;12)$. Tìm điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại C.

Giải.

Giả sử $C(x;y)$. Khi đó $\overrightarrow{CA}=(7-x;26-y), \overrightarrow{CB}=(12-x;12-y)$.

Tam giác ABC vuông cân tại C khi và chỉ khi

$$\begin{cases}CA=CB\\ CA\perp CB\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(7-x)^2+(26-y)^2=(12-x)^2+(12-y)^2\\ (7-x)(26-x)+(12-y)(12-y)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}10x-28y+437=0\\ x^2+y^2-33x-24y+326=0\end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được hai nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{33}{2};\dfrac{43}{2}\right), (x;y)=\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{33}{2}\right)$

Vậy có hai điểm C thoả mãn yêu cầu bài toán là

$C_1\left(\dfrac{33}{2};\dfrac{43}{2}\right), C_2\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{33}{2}\right)$.

Bài 20. Cho A(–4 ; 2), B(2 ; 6), C(0 ; –2). Xác định toạ độ trọng tâm G, trực tâm H, tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC.

Giải.

- Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right) \text{ hay } G\left(-\frac{2}{3};2\right).$$

- Gọi H(x; y) là trực tâm của tam giác ABC. Khi đó

$\overrightarrow{AH}=(x+4;y-2), \overrightarrow{BH}=(x-2;y-6), \overrightarrow{BC}=(-2;-8), \overrightarrow{AC}=(4;-4)$

Ta có: $\begin{cases}AH\perp BC\\ BH\perp AC\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2(x+4)-8(y-2)=0\\ 4(x-2)-4(y-6)=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-x-4y+4=0\\ x-y+4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{-12}{5}\\ y=\dfrac{8}{5}\end{cases}$$

Vậy $H\left(\dfrac{12}{5};\dfrac{8}{5}\right)$.

- Gọi I(x; y) là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Khi đó

$$\begin{cases}IA=IB\\ IA=IC\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}IA^2=IB^2\\ IA^2=IC^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+4)^2+(y-2)^2=(x-2)^2+(y-6)^2\\ (x+4)^2+(y-2)^2=x^2+(y+2)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}8x+16-4y+4=-4x+4-12y+36\\ 8x+16-4y+4=4y+4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x+2y=5\\ x-y=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{1}{5}\\ y=\dfrac{11}{5}\end{cases}.$$

Vậy $I\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{11}{5}\right)$.

Dạng 7. Giải bài toán hình học bằng phương pháp tọa độ.

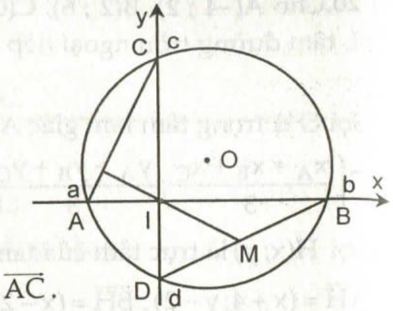
Bài 21. Cho đường tròn (O) có hai dây cung AB và CD vuông góc và cắt nhau tại I. Chứng minh rằng đường thẳng qua I và vuông góc với AC đi qua trung điểm BD.

Giải.

Chọn hệ trục toạ độ Ixy với trục Ix chứa AB và trục Iy chứa DC (như hình vẽ). Khi đó I(0 ; 0). Đặt A(a ; 0), B(b ; 0), C(0 ; c), D(0 ; d).

Ta có: $P_{I/(O)}=\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{ID} \Leftrightarrow ab=cd$. (1)

Gọi M là trung điểm BD, suy ra $M\left(\frac{b}{2};\frac{d}{2}\right)$.



Ta chứng minh $IM \perp AC$.

Ta có $\overrightarrow{IM}=\left(\frac{b}{2};\frac{d}{2}\right)$, $\overrightarrow{AC}=(-a;c)$.

Do đó: $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AC}=-a.\frac{b}{2}+c.\frac{d}{2}=\frac{-ab+cd}{2}$. (2)

Thay (1) vào (2), ta được $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow \overrightarrow{IM}\perp\overrightarrow{AC}$.

Do đó $IM \perp AC$, nói cách khác đường thẳng qua I và vuông góc AC đi qua trung điểm BD.

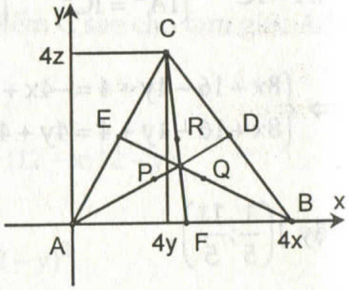
Bài 22. Cho tam giác ABC với các đường trung tuyến AD, BE, CF. Gọi P, Q, R tương ứng là trung điểm AD, BE, CF. Tính giá trị

$$F=\frac{AQ^2+AR^2+BP^2+BR^2+CP^2+CQ^2}{AB^2+BC^2+CA^2}$$

Giải.

Xét trong hệ trục tọa độ nhận A làm gốc và trục hoành là tia AB, trục tung là đường thẳng qua A vuông góc AB. Khi đó A(0 ; 0). Đặt B(4x ; 0), C(4y ; 4z). Suy ra : $D(2x+2y;2z)$, $E(2y;2z)$, $F(2x;0)$, từ đó ta được :

$Q(2x+y;z)$, $R(x+2y;2z)$, $P(x+y;z)$.



Ta có

$AQ^2=(2x+y)^2+z^2=4x^2+4xy+y^2+z^2$;

$AR^2=(x+2y)^2+4z^2=x^2+4xy+4y^2+4z^2$;

$BP^2=(3x-y)^2+z^2=9x^2-6xy+y^2+z^2$;

$BR^2=(3x-2y)^2+4z^2=9x^2-6xy+4y^2+4z^2$;

$CP^2=(x-3y)^2+9z^2=x^2-6xy+9y^2+9z^2$;

$CR^2=(2x-3y)^2+9z^2=4x^2-12xy+9y^2+9z^2$.

Từ đó $AQ^2+AR^2+BP^2+BR^2+CP^2+CQ^2=28(x^2-xy+y^2+z^2)$

Tương tự như trên

$AB^2=16x^2, BC^2=16x^2-32xy+16y^2+16z^2, CA^2=16y^2+16z^2$

Và $AB^2+BC^2+CA^2=32(x^2-xy+y^2+z^2)$

Vậy $F=\frac{7}{8}$.

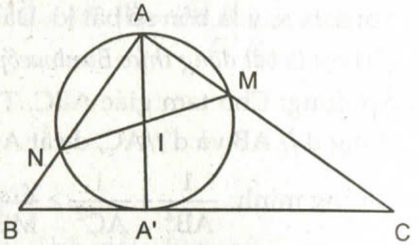
Dạng 8. Bài toán liên quan đến phương tích một điểm đối với đường tròn.

Áp dụng $P_{M/(O)}=\overline{MA}.\overline{MB}=d^2-R^2$ *(với d = MO, R là bán kính của (O)).*

Bài 23. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AA′. Đường tròn đường kính AA′ cắt AB và AC lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh AM.AB = AN.AC, từ kết quả này hãy chứng tỏ rằng tứ giác BMNC nội tiếp được đường tròn.

b) Chứng minh $\frac{BM}{CN}=\frac{BA^3}{CA^3}$.



Giải.

a) Các tam giác AA′B và AA′C vuông tại A′ có MA′ và NA′ là các đường cao nên

$A'A^2=AM.AB$; $A'A^2=AN.AC$.

Do đó : AM.AB = AN.AC.

- Vì $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AC}$ do đó ta có

$\overline{AM}.\overline{AB}=\overline{AN}.\overline{AC}$ (1).

Dựng đường tròn đi qua 3 điểm B, M, C, kí hiệu đường tròn này là (BMC). Đường tròn (BMC) cắt AC tại N′. Ta có:

$P_{A/(BMC)}=\overline{AM}.\overline{AB}=\overline{AN'}.\overline{AC}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có : $\overline{AN}.\overline{AC}=\overline{AN'}.\overline{AC} \Rightarrow \overline{AN}=\overline{AN'}$.

Do đó $N \equiv N'$, suy ra N nằm trên đường tròn (BMC). Vậy tứ giác BMNC nội tiếp được đường tròn.

b) Các tam giác AA′B và AA′C vuông tại A′có MA′ và NA′ là các đường cao nên ta có: $BA'^2=BM.BA$; $CA'^2=CN.CA$.

Suy ra : $\frac{BA'^2}{CA'^2}=\frac{BM.BA}{CN.CA}$; (3)

Tam giác ABC vuông tại A có đường cao AA′, nên ta có :

$BA^2=BA'.BC$ và $CA^2=CA'.CB$, do đó :

$$\frac{BA^2}{CA^2}=\frac{BA'.BC}{CA'.CB}=\frac{BA'}{CA'} \Rightarrow \frac{BA'^2}{CA'^2}=\left(\frac{BA}{CA}\right)^4 \quad (4).$$

Từ (3) và (4) ta thu được $\frac{BM}{CN}=\frac{BA^3}{CA^3}$.

Chú ý : *Ở bài trên ta đã chứng minh được kết quả quan trọng sau :*

- *Nếu* $\overline{AM}.\overline{AB}=\overline{AN}.\overline{AC}$ *thì các điểm B, M, N, C cùng nằm trên đường tròn.*

- *Ngoài ra, nếu $\overline{MD}.\overline{ME} = MT^2$ thì MT là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác TDE.*

Đây là hai cách để chứng minh một tứ giác nội tiếp được đường tròn.

Dạng 9. Ứng dụng tích vô hướng để chứng minh bất đẳng thức.

Dựa vào biểu thức tọa độ của tích vô hướng.

Bài 24. a) Chứng minh rằng: $|ax+by| \le \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$. (1)

với a, b, x, y là bốn số bất kì. Dấu " = " xảy ra khi nào?

((1) gọi là bất đẳng thức Bunhiacôpxki, hay bất đẳng thức Svacxơ).

b) Áp dụng: Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC lấy một điểm M bất kì. Qua M dựng d // AB và d'//AC, d cắt AC tại E và cắt AB tại F.

Chứng minh: $\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2} \ge \dfrac{1}{ME^2+MF^2}$.

Giải.

Cho $\vec{u}=(x;y), \vec{v}=(a;b)$. Ta có:

$\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u};\vec{v}) \Rightarrow |\vec{u}.\vec{v}|=||\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u};\vec{v})| \le |\vec{u}|.|\vec{v}|$

Do đó $|ax+by| \le \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$\cos(\vec{u};\vec{v})=\pm1 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow bx-ay=0$.

b) Áp dụng định lí Talét, ta có:

$ME // AB \Rightarrow \dfrac{ME}{AB}=\dfrac{CM}{CB}$; $MF // AC \Rightarrow \dfrac{MF}{AC}=\dfrac{BM}{CB}$

Do đó $\dfrac{ME}{AB}+\dfrac{MF}{AC}=\dfrac{CM+MB}{CB}=1$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki cho các số ME, MF, $\dfrac{1}{AB}, \dfrac{1}{AC}$ ta được:

$$1 = ME.\frac{1}{AB}+MF.\frac{1}{AC} \le \sqrt{(ME^2+MF^2)(\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2})}.$$

Vậy $\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2} \ge \dfrac{1}{ME^2+MF^2}$.

C. LUYỆN TẬP

- **Tích vô hướng, góc, độ dài của vectơ**

2.7. Cho tam giác ABC cân tại A và góc A =120°. Hãy xác định góc của các cặp vectơ: $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$, $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB})$, $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB})$.

Hướng dẫn giải

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=120^0$, $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})=150^0$, $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB})=60^0$, $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB})=150^0$

2.8. Tính $\vec{a}.\vec{b}$ trong các trường hợp sau đây:

a) $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=\sqrt{2}, (\vec{a},\vec{b})=30^o$;

b) $|\vec{a}|=\sqrt{3}, |\vec{b}|=\sqrt{6}, (\vec{a},\vec{b})=45^o$;

c) $|\vec{a}|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}, |\vec{b}|=2\sqrt{3}, (\vec{a},\vec{b})=60^o$;

d) $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, (\vec{a},\vec{b})=90^o$;

e) $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=\sqrt{3}, (\vec{a},\vec{b})=120^o$;

g) $|\vec{a}|=\sqrt{5}, |\vec{b}|=\sqrt{5}, (\vec{a},\vec{b})=135^o$;

h) $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=\sqrt{2}, (\vec{a},\vec{b})=150^o$;

i) $|\vec{a}|=\sqrt{3}-\sqrt{2}, |\vec{b}|=\sqrt{3}+\sqrt{2}, (\vec{a},\vec{b})=180^o$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng định nghĩa tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$ ta có

a) $\vec{a}.\vec{b}=1.\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

b) $\vec{a}.\vec{b}=\sqrt{3}.\sqrt{6}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{36}}{2}=3$.

b) $\vec{a}.\vec{b}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}.2\sqrt{3}.\dfrac{1}{2}=1$.

d) $\vec{a}.\vec{b}=1.\dfrac{\sqrt{2}}{2}.0=0$.

e) $\vec{a}.\vec{b}=3.\sqrt{3}.\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

g) $\vec{a}.\vec{b}=\sqrt{5}.\sqrt{5}.\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

h) $\vec{a}.\vec{b}=1.\sqrt{2}.\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

i) $\vec{a}.\vec{b}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})(-1)=-1$.

2.9. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

a) Nếu $(2\vec{a})(-\vec{b})=0$ thì $\vec{a}\perp\vec{b}$;

b) Nếu $\vec{a}.\vec{b}=1$ thì $|\vec{a}||\vec{b}|=1$;

c) Nếu $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}\vec{c}$ và $\vec{a}\ne\vec{0}$ thì $\vec{b}=\vec{c}$;

d) Nếu $\vec{a}^2=\vec{b}^2$ thì $\vec{a}=\vec{b}$ hoặc $\vec{a}=-\vec{b}$.

Hướng dẫn giải

a) Đúng. b) sai.

c) Sai. Giả sử $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}\vec{c} \Leftrightarrow \vec{a}(\vec{b}-\vec{c})=0$.

Nếu $\vec{a}\ne\vec{0}$ thì có thể xảy ra trường hợp $\vec{a}\perp(\vec{b}-\vec{c})$ và $\vec{b}\ne\vec{c}$.

d) Sai vì có thể xảy ra trường hợp $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương nhưng

$$|\vec{a}|=|\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a}^2=\vec{b}^2.$$

2.10. Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tùy ý. Chứng minh rằng

a) $\vec{a}\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$; b) $\vec{a}\vec{b}=\frac{1}{4}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$.

Hướng dẫn giải

a) Sử dụng $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2=\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2$ để biến đổi vế phải.

$$\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2+2\vec{a}\vec{b}\right)=\vec{a}\vec{b}.$$

b) Ta có $\frac{1}{4}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)=\frac{1}{4}\left(\vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2-\vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}-\vec{b}^2\right)=\vec{a}\vec{b}.$

2.11. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = 2, C = 30º.

Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CB}$.

Hướng dẫn giải

Dễ dàng tính được $BC=4,\ AC=2\sqrt{2}$.

- $AB\perp AC\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$
- $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\left|\overrightarrow{CA}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=2\sqrt{3}.4\cos30^0=8\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}=12$
- $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=2\sqrt{3}.4\cos150^0=-12$

  Hoặc tính như sau : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=-12.$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=2.4\cos120^0=8.\left(-\frac{1}{2}\right)=-4$
- $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-4.$

2.12. Cho hình thang vuông ABCD (AB//CD) với $\widehat{A}=\widehat{D}=90^0$, AB =AD = a, CD = 2a.

Sử dụng công thức hình chiếu để tính các tích vô hướng

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD},\ \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{DB}.$$

Hướng dẫn giải

- Chiếu vectơ $\overrightarrow{BD}$ lên giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$, ta được vectơ $\overrightarrow{BA}$.

  Từ đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}^2=-a^2$.
- Gọi E là trung điểm DC. Khi đó ABED là hình vuông.

  Vậy hình chiếu của $\overrightarrow{DB}$ lên giá của $\overrightarrow{DC}$ là vectơ $\overrightarrow{DE}$

  $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DE}=\left|\overrightarrow{DB}\right|\left|\overrightarrow{DE}\right|\cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DE}\right)=2a.a.\cos0^0=2a^2$
- Gọi F là hình chiếu vuông góc của C lên AB.

  Khi đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BF}=-a.a.\cos180^0=a^2$
- $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=a^2$.

2.13. Cho hình vuông ABCD. Gọi M và N là các điểm thoả mãn $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$. Gọi I là giao điểm của AM và BN.

a) Tính tỉ số $\frac{BI}{BN}$.

b) Chứng minh rằng AI vuông góc với IC.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $k=\frac{BI}{BN}\Rightarrow\overrightarrow{BI}=k\overrightarrow{BN}$.

Biểu diễn $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AI}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$ ta được

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}+k\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}\right)=\left(1+\frac{k}{2}\right)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AD}$$

Do các vectơ $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AI}$ là cùng phương nên ta có

$$\left(1+\frac{k}{2}\right):1=k:\frac{1}{3}\Rightarrow1+\frac{k}{2}=3k\Rightarrow k=\frac{2}{5}$$

b) Từ câu a) ta được $\overrightarrow{AI}=\frac{6}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$

Do đó $\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AC}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$

Ta có (với chú ý rằng $AB\perp AD$)

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CI}=\left(\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}\right)\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{5}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{6}{25}AB^2-\frac{6}{25}AD^2=0.$$

Vậy $AI\perp CI$.

2.14. Cho tam giác ABC với $AB=3$, $BC=4$, $AC=6$.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, suy ra cosA.

b) M và N là hai điểm xác định bởi $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$. Tính độ dài MN

Hướng dẫn giải

a) Ta có $BC^2=\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2=\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}^2$

Từ đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}=\frac{9+36-16}{2}=\frac{29}{2}$,

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos A\Rightarrow\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC}=\frac{29}{36}.$$

b) Ta có $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{3}{8}.\frac{29}{2}=-\frac{87}{16}$. Ta lại có

$$MN^2=\overrightarrow{MN}^2=\left(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}\right)^2=AN^2+AM^2-2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}$$

Để ý rằng $AM=\frac{1}{4}AB=\frac{3}{4},\ AN=\frac{3}{2}AC=9$. Suy ra

$$MN^2=\frac{9}{16}+81-2.\frac{-87}{16}=\frac{1479}{16}\Rightarrow MN=\frac{\sqrt{1479}}{4}.$$

2.15. Cho tam giác ABC vuông tại A với AB = 2, AC = 3. Tia phân giác của góc BAC cắt cạnh BC tại D. Tính độ dài đoạn AD.

Hướng dẫn giải

Áp dụng tính chất đường phân giác, ta có: $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{2}{3}\Rightarrow\overrightarrow{DC}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{DB}$.

Từ đó $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=-\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)\Rightarrow 5\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$.

Suy ra

$$25AD^2=25\overrightarrow{AD}^2=\left(3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)^2=9AB^2+4AC^2+12\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=36+36=72.$$

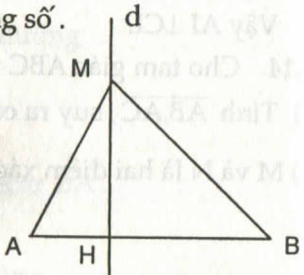
Vậy $AD=\frac{6\sqrt{2}}{5}$.

- **Chứng minh hệ thức liên quan đến tích vô hướng**

2.16. Cho đoạn thẳng AB = a. H là điểm trên AB sao cho $2\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}=\vec{0}$. Gọi d là đường thẳng qua H và vuông góc với AB. M là một điểm trên d. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MH^2-\frac{2a^2}{9}$;

b) Khi M di động trên (d) thì tích $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}$ là một hằng số.



Hướng dẫn giải

a) Dễ thấy $HA=\frac{a}{3},\ HB=\frac{2a}{3}$. Ta có

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right)\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HB}\right)$$

$$=\overrightarrow{MH}^2+\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB}$$

Chú ý rằng vì $MH\perp AB$ nên $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{HB}=0$

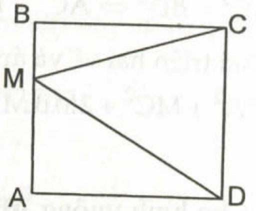
Mặt khác: $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB}=-HA.HB.=-\frac{a}{3}.\frac{2a}{3}=-\frac{2a^2}{9}$. Vậy $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MH^2-\frac{2a^2}{9}$.

b) Khi M di động trên (d), áp dụng công thức hình chiếu ta có

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=AB.AH=\frac{a^2}{3}\text{ (không đổi).}$$

2.17. Cho hình vuông ABCD. M là điểm trên cạnh AB. Chứng minh rằng $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CD}$ không đổi khi M di động trên cạnh AB.

Hướng dẫn giải



Do $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{DC}$ cùng hướng, ta có

$$\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DC}=\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM}\right)\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DC}=AM.DC$$

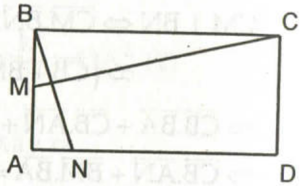
$$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}\right)\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CD}=BM.CD$$

(vì $\overrightarrow{BM},\overrightarrow{CD}$ cùng hướng). Do đó

$$\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CD}=AM.DC+BM.CD=CD(AM+BM)=a^2.$$

2.18. Cho hình chữ nhật ABCD có cạnh bằng AB = 2 và AD = 4. Gọi M là trung điểm cạnh AB và N là điểm trên cạnh AD sao cho $\overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{AD}$. Xác định k để có $CM\perp BN$.

Hướng dẫn giải



Ta có Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Ta có :

$$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a};$$

$$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AD}=-\vec{a}+k\vec{b}.$$

Điều kiện để $CM\perp BN$ là $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BN}=0$.

Ta có $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BN}=(-\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a})(-\vec{a}+k\vec{b})=\vec{b}\vec{a}-k\vec{b}^2+\frac{1}{2}\vec{a}^2-\frac{1}{2}k\vec{a}\vec{b}$.

Vì $\vec{a}\perp\vec{b}$ nên $\vec{b}\vec{a}=\vec{a}\vec{b}=0$, ta có $\vec{a}^2=4,\ \vec{b}^2=16$. Do đó

$$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BN}=0\Leftrightarrow -k.16+\frac{1}{2}.4=0\Leftrightarrow k=\frac{1}{8}.$$

Vậy với $k=\frac{1}{8}$ thì $CM\perp BN$.

2.19. Cho hình chữ nhật ABCD. M là điểm tùy ý trên mặt phẳng. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$;

b) $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$;

c) $MA^2+MC^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}=4MO^2$.

Hướng dẫn giải

a) Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật. Ta có

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OA}\right)$$

$$=\overrightarrow{MO}^2-\overrightarrow{OA}^2=MO^2-OA^2$$

Tương tự ta cũng có $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = MO^2 - OB^2$.

Từ đó $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$.

b) $AC^2 = BD^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{BD}^2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}\right)^2 = \left(\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MB}\right)^2$

Khai triển hai vế và áp dụng kết quả câu a) ta có điều cần chứng minh.

c) $MA^2 + MC^2 + 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = MB^2 + MD^2 + 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$

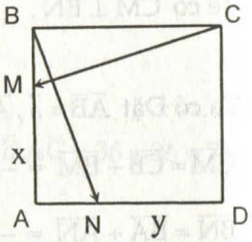
$$= \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\right)^2 = 4MO^2.$$

2.20. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 1. Hai điểm M, N thay đổi trên hai cạnh AB, AD sao cho $AM = x\ (0 \le x \le 1)$, $DN = y\ (0 \le y \le 1)$.

Tìm điều kiện của x, y sao cho $CM \perp BN$.

Hướng dẫn giải

Dễ thấy $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}$



Ta có

$CM \perp BN \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BN} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM}\right)\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AN} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BA} = 0$

Chú ý rằng do $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AN}$ ngược hướng và $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{BA}$ cùng hướng

nên $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AN} = -(a - y)a$ và $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BA} = a(a - x)$

Từ đó ta có $CM \perp BN \Leftrightarrow -(a - y)a + a(a - x) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

2.21. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp những điểm M sao cho :

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$; b) $\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}\right) = 0$;

c) $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$; d) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -MA.MB$.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử M là điểm thoả mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MA \perp MB \Leftrightarrow$ M nằm trên đường tròn đường kính AB.

b) Ta có $\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow MA \perp BC \Leftrightarrow$ M nằm trên đường thẳng qua A và vuông góc với BC.

c) Gọi I là trung điểm AB, G là trọng tâm tam giác ABC.

Khi đó $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ và $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Ta có $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}.3\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow MI \perp MG \Leftrightarrow$ M nằm trên đường tròn đường kính IG.

d) Giả sử $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -MA.MB \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MA}\right|\left|\overrightarrow{MB}\right|\cos\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = -MA.MB$

$\Leftrightarrow \cos\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = -1 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = 180^0 \Leftrightarrow$ M nằm bên trong đoạn thẳng AB

2.22. Cho hai điểm A, B và k là một số không đổi. Tìm tập hợp những điểm M thoả điều kiện: $MA^2 + MB^2 = k^2$.

Hướng dẫn giải

Với O là trung điểm AB. Ta có :

$MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 = MO^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA} + OA^2$

$MB^2 = \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 = MO^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB} + OB^2$

$\Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + 2\overrightarrow{MO}.(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + OA^2 + OB^2$ (1)

Vì O là trung điểm AB nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$ và $OA = OB$, do đó (1) trở thành $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + 2OA^2$.

Gọi tập hợp các điểm M cần tìm là (L). Ta có :

$MA^2 + MB^2 = k^2 \Leftrightarrow 2(MO^2 + OA^2) = k^2 \Leftrightarrow MO^2 = \dfrac{k^2}{2} - OA^2$ (2)

Đặt $OA^2 = \dfrac{m^2}{2}$. (2) trở thành $MO^2 = \dfrac{1}{2}(k^2 - m^2)$. Xảy ra :

i) $k^2 < m^2$ thì $MO^2 < 0$: (L) $= \varnothing$.

ii) $k^2 = m^2$ thì $MO^2 = 0 \Leftrightarrow M \equiv O$: (L) = { O }.

iii) $k^2 > m^2 \Leftrightarrow MO = \sqrt{\dfrac{1}{2}(k^2 - m^2)}$: (L) là đường tròn tâm O có bán kính là $R = \sqrt{\dfrac{1}{2}(k^2 - m^2)}$.

- **Biểu thức tọa độ của tích vô hướng**

2.23. Cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 1)$, $\vec{b} = (1; 0)$. Các khẳng định sau đây đúng hay sai:

a) $\vec{a}\vec{b} = 1$; b) $|\vec{a}||\vec{b}| = 2$;

b) $\cos\left(\vec{a}, 2\vec{b}\right) = 0$; d) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.

Hướng dẫn giải

Dùng hình vẽ trên hệ trục Oxy, ta có kết quả:

a) và d) đúng ; b) và c) sai

2.24. Cho $\vec{a} = (3;5)$, $\vec{b} = (-1;4)$.

a) Xác định toạ độ các vectơ $\vec{a} + 2\vec{b}$, $2\vec{a} - 3\vec{b}$, $4\vec{a} + 3\vec{b}$

b) Tính $\left|\vec{a} + 2\vec{b}\right|, \left|2\vec{a} - 3\vec{b}\right|$.

c) Tính các tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$, $2\vec{a}\left(4\vec{a}+3\vec{b}\right)$, $\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\left(4\vec{a}+3\vec{b}\right)$.

Hướng dẫn giải

a) $\vec{a}+2\vec{b}=(1\,;13)$, $2\vec{a}-3\vec{b}=(9\,;-2)$, $4\vec{a}+3\vec{b}=(9\,;32)$

b) $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{170}$, $\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|=\sqrt{85}$

c) $\vec{a}.\vec{b}=17$, $2\vec{a}.\left(4\vec{a}+3\vec{b}\right)=374$, $\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\left(4\vec{a}+3\vec{b}\right)=17$

2.25. Tính góc giữa các cặp vectơ sau đây:

a) $\vec{a}=(4;3)$, $\vec{b}=(1;7)$;

b) $\vec{a}=(6;-8)$, $\vec{b}=(12;9)$;

c) $\vec{a}=(2;5)$, $\vec{b}=(3;-7)$;

d) $2\vec{a}+\vec{b}$ và $-3\vec{a}+4\vec{b}$ với $\vec{a}=(1;1)$, $\vec{b}=(-3;4)$.

Hướng dẫn giải

a) 45°, b) 90° c) 135°.

d) Ta có $2\vec{a}+\vec{b}=(-1;6)\Leftrightarrow\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{37}$

$-3\vec{a}+4\vec{b}=(-15;13)\Rightarrow\left|-3\vec{a}+4\vec{b}\right|=\sqrt{225+169}=\sqrt{394}$, $\vec{a}.\vec{b}=-2$

$\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\left(-3\vec{a}+4\vec{b}\right)=-6\vec{a}^2+5\vec{a}\vec{b}+4\vec{b}^2=-6.2+5(-2)+4.25=78$

Gọi α là góc giữa hai vectơ. Khi đó $\cos\alpha=\dfrac{78}{\sqrt{37}.\sqrt{394}}$

2.26. Cho hai vecơ $\vec{a}=(3;6)$, $\vec{b}=(-2;5)$.

a) Tìm vectơ $\vec{u}$ sao cho $\vec{u}.\vec{a}=0$ và $\vec{u}.\vec{b}=-4$

b) Tìm vectơ $\vec{v}$ sao cho $|\vec{v}|=1$ và $\vec{v}$ vuông góc với vectơ $3\vec{a}-2\vec{b}$.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử $\vec{u}=(x;y)$. Ta có

$$\begin{cases}\vec{u}.\vec{a}=0\\ \vec{u}.\vec{b}=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+6y=0\\ -2x+5y=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{8}{9}\\ y=-\dfrac{4}{9}\end{cases}.\text{ Vậy }\vec{u}=\left(\frac{8}{9};-\frac{4}{9}\right).$$

b) Trước hết dễ dàng tính được $3\vec{a}-2\vec{b}=(13;8)$

Giả sử $\vec{v}=(x;y)$. Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=1\\ 13x+8y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=1\\ y=\dfrac{-13}{8}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+\dfrac{169}{64}x^2=1\\ y=\dfrac{-13}{8}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\dfrac{64}{233}\\ y=\dfrac{-13}{8}x\end{cases}$$

Giải hệ trên được hai nghiệm: $(x;y)=\left(\dfrac{-8}{\sqrt{233}};\dfrac{13}{\sqrt{233}}\right)$, $(x;y)=\left(\dfrac{8}{\sqrt{233}};\dfrac{-13}{\sqrt{233}}\right)$

Đó cũng chính là toạ độ của vectơ $\vec{v}$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

2.27. Cho $\vec{a}=(3;2),\vec{b}=(-1;5),\vec{c}=(4;7)$.

a) Tìm x, y sao cho $\vec{c}=x.\vec{a}+y.\vec{b}$.

b) Tìm toạ độ vectơ $\vec{v}$ sao cho $\vec{v}\perp\vec{a}$ và $\left|\vec{v}\right|=\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$. Khi đó ta có hệ $\begin{cases}3x-y=4\\ 2x+5y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{27}{17}\\ y=\dfrac{13}{17}\end{cases}$

b) Giả sử $\vec{v}=(x;y)$. Khi đó $\vec{v}\perp\vec{a}\Leftrightarrow\vec{v}.\vec{a}=0\Leftrightarrow 3x+2y=0$.

Mặt khác, do $\left|\vec{v}\right|=\sqrt{2}$ nên $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}\Leftrightarrow x^2+y^2=2$.

Vậy ta có hệ: $\begin{cases}3x+2y=0\\ x^2+y^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{-3x}{2}\\ x^2+\left(\dfrac{-3x}{2}\right)^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{-3x}{2}\\ 13x^2=8\end{cases}$

Giải hệ, ta được hai nghiệm là:

$$(x;y)=\left(\frac{2\sqrt{26}}{13};-\frac{3\sqrt{26}}{13}\right),\ (x;y)=\left(-\frac{2\sqrt{26}}{13};\frac{3\sqrt{26}}{13}\right).$$

Từ đó có hai vectơ thoả mãn yêu cầu bài toán là

$$\overrightarrow{v_1}=\left(\frac{2\sqrt{26}}{13};-\frac{3\sqrt{26}}{13}\right)\text{ và }\overrightarrow{v_2}=\left(-\frac{2\sqrt{26}}{13};\frac{3\sqrt{26}}{13}\right).$$

2.28. Cho hai điểm A(–3; 4), B(1; 5), C(0; 4).

a) Tính toạ độ của $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}$.

b) Tính $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}|$.

c) Tính số đo các góc của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

a) $\overrightarrow{AB}=(4;1)$, $\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}=(7;1)$.

b) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{17}$, $\left|\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}\right|=5\sqrt{2}$.

c) $\cos A=\dfrac{4}{\sqrt{17}}$, $\cos B=\dfrac{5}{\sqrt{34}}$, $C=135^0$.

2.29. Cho A(1; 2), B(2; 3). Hãy tìm tọa độ của vectơ đơn vị cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.

Hướng dẫn giải

Có hai vectơ đơn vị cùng phương với $\overrightarrow{AB}=(1;1)$ là

$$\overrightarrow{v_1}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ và } \overrightarrow{v_2}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

2.30. Cho hai điểm A(3; 4) và B(−1; 5).

a) Tìm điểm M trên trục hoành sao cho khoảng cách từ đó đến hai điểm A và B bằng nhau.

b) Tìm điểm N trên trục tung sao cho $\widehat{NAB}=45^0$.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử M trên trục hoành. Khi đó M(a ; 0), A(3 ; 4), B(−1 ; 5).

Ta có $MA=MB \Leftrightarrow MA^2=MB^2 \Leftrightarrow (3-a)^2+16=(-1-a)^2+25$,

hay $-6a+25=2a+26 \Leftrightarrow a=-\frac{1}{8}$.

Vậy điểm M cần tìm là $M\left(-\frac{1}{8};0\right)$.

b) Giả sử N trên trục tung. Khi đó $N(0;b)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-4;1)$, $\overrightarrow{AN}=(-3;b-4)$.

Theo giả thiết $\widehat{NAB}=45^0 \Leftrightarrow \cos 45^0=\dfrac{(-3)(-4)+1.(b-4)}{\sqrt{16+1}.\sqrt{9+(b-4)^2}}$,

hay $\dfrac{b+8}{\sqrt{17(b^2-8b+25)}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 4(b^2+16b+64)=34b^2-272b+850$

$\Leftrightarrow 5b^2-56b+99=0 \Leftrightarrow b=9$ hoặc $b=\dfrac{11}{5}$.

Vậy có hai điểm thoả mãn yêu cầu bài toán là $N_1(0;9)$, $N_2\left(0;\dfrac{11}{5}\right)$.

2.31. Cho A(2 ;−1), B(3 ;−4).

a) Tìm điểm M trên trục hoành sao cho tam giác MAB vuông tại A.

b) Tìm điểm N sao cho tam giác NAB nhận gốc tọa độ O làm trực tâm.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-3)$. Vì M trên trục hoành nên $M(x;0)$.

Do đó: $\overrightarrow{MA}=(2-x;-1)$.

Ta có tam giác MAB vuông tại A $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}=0$,

hay $2-x+3=0 \Leftrightarrow x=5$. Vậy M(5;0).

b) Giả sử $N(x;y)$. Ta có

$\overrightarrow{NA}=(2-x;-1-y), \overrightarrow{NB}=(3-x;-4-y), \overrightarrow{OA}=(2;-1), \overrightarrow{OB}=(3;-4)$

Tam giác NAB nhận gốc O làm trực tâm nên

$$\begin{cases} OA\perp NB \\ OB\perp NA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{NB}=0 \\ \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{NA}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(3-x)-1(-4-y)=0 \\ 3(2-x)-4(-1-y)=0 \end{cases}$$

Giải hệ ta được nghiệm $x=6, y=2$. Vậy có điểm N(6;2).

2.32. Cho A(1; 4), B(−2; 6).

a) Tìm điểm M trên trục tung sao cho A, B, M thẳng hàng.

b) Tìm điểm N đối xứng với gốc tọa độ O qua đường thẳng AB.

Hướng dẫn giải

a) $M\left(0;\dfrac{14}{3}\right)$.   b) $N\left(\dfrac{56}{13};\dfrac{84}{13}\right)$.

2.33. Cho B(4 ;−2).

a) Xác định tọa độ các điểm A và C sao cho OABC là hình vuông nhận OB làm đường chéo.

b) Tìm hai điểm M trên trục hoành và N trên trục tung sao cho hình chiếu của O lên MN là điểm B.

Hướng dẫn giải

Giả sử A(x ; y). Gọi I là trung điểm OB. Ta có I(2 ;−1)

$\overrightarrow{OB}=(4;-2), \overrightarrow{IA}=(x-2;y+1)$

Vì OABC là hình vuông nên OA ⊥ AB và $OB^2=2OA^2$ (vì $OB=OA\sqrt{2}$)

$$\text{Từ đó} \begin{cases} 4(x-2)-2(y+1)=0 \\ 2(x^2+y^2)=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-5=0 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-5 \\ x^2+(2x-5)^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-5 \\ 5x^2-20x+15=0 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được nghiệm (x ; y) = (3 ; 1), (x; y) = (1 ;−3).

Từ đó ta có A(3 ; 1), C(1 ;−3).

b) Giả sử M(a ; 0, N(0 ; b). Khi đó $\overrightarrow{MN}=(-a;b), \overrightarrow{BM}=(a-4;2)$

Từ giả thiết ta có (chú ý M không trùng với gốc tọa độ).

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{OB}=0 \\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{OB}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a-2b=0 \\ 4(a-4)-2.2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a \\ a=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-10 \end{cases}$$

Vậy M(5 ; 0), N(0 ; −10).

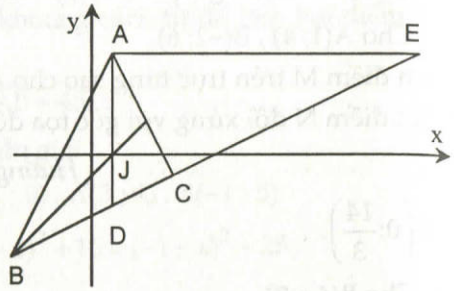
Nhận xét: *Dùng điều kiện* $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{BM}=0, \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{BN}=0$ *ta cũng tìm được M, N.*

2.34. Cho tam giác ABC với A(1 ; 5),B(–4 ;–5),C(4 ;–1).

a) Tìm tọa độ chân các đường phân giác trong và ngoài của góc A của tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp của tam giác.

Hướng dẫn giải



Ta có A(1 ; 5), B(–4 ; –5), C(4 ; –1),

$$AB=\sqrt{(-4-1)^2+(-5-5)^2}=5\sqrt{5}$$

$$AC=\sqrt{(4-1)^2+(-1-5)^2}=3\sqrt{5}$$

a) Gọi $D(x;y)$ là giao điểm của phân giác trong góc A với cạnh BC. Ta có :

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{5}{3}\ \Rightarrow \overrightarrow{DB}=-\frac{5}{3}\overrightarrow{DC}.$$

$\overrightarrow{DB}=(-4-x;-5-y)$, $\overrightarrow{DC}=(4-x;-1-y)$.

Do đó: $\overrightarrow{DB}=-\frac{5}{3}\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}-4-x=-\frac{5}{3}(4-x)\\ -5-y=-\frac{5}{3}(-1-y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8x=8\\ 8y=-20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=-\frac{5}{2}\end{cases}$

Vậy $D\left(1;-\frac{5}{2}\right)$.

Tương tự như trên ta tìm được giao điểm của phân giác ngoài góc A với cạnh BC là $E(16;5)$.

b) Gọi $J(x;y)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó BJ là phân giác trong của góc B. Ta có: $BD=\sqrt{(1+4)^2+\left(-\frac{5}{2}+5\right)^2}=\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

Theo tính chất phân giác, $\frac{JA}{JD}=\frac{AB}{BD}=2\Rightarrow\overrightarrow{JA}=-2\overrightarrow{JD}$

Từ đó ta tìm được toạ độ tâm đường tròn nội tiếp $J(1;0)$.

2.35. Cho tam giác ABC với A(0 ;–2), B(3 ; 1), C(–1 ; 0).

a) Tính cosA và độ dài trung tuyến AM.

b) Tìm tọa độ chân đường cao hạ từ A xuống BC.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;3),\overrightarrow{AC}=(-1;2)\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3$.

Từ đó $\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{3}{3\sqrt{2}.\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Trung điểm BC là $M\left(1;\frac{1}{2}\right)\Rightarrow AM=\sqrt{(1-0)^2+\left(\frac{1}{2}+2\right)^2}=\frac{\sqrt{29}}{2}$.

b) Gọi H(x ; y) là chân đường cao hạ từ A xuống BC. Khi đó $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BH}$ cùng phương với $\overrightarrow{BC}$.

Ta có $\overrightarrow{AH}=(x;y+2)$, $\overrightarrow{BC}=(-4;-1)$, $\overrightarrow{BH}=(x-3;y-1)$.

Vậy điều kiện trên trở thành

$$\begin{cases}-4x-1(y+2)=0\\ \frac{x-3}{-4}=\frac{y-1}{-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4x-y-2=0\\ -x+4y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{9}{17}\\ y=\frac{2}{17}\end{cases}\Rightarrow H\left(-\frac{9}{17};\frac{2}{17}\right).$$

2.36. Cho tam giác ABC với A(1 ; 1) , B(–3 ;–2),C(0 ; 1).

a) Tìm toạ độ trọng tâm G, trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC. Chứng minh rằng G, H, I thẳng hàng.

b) Gọi A′ là giao điểm của đường cao AH với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm toạ độ A′

Hướng dẫn giải

a) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

Khi đó $G\left(\frac{x_A+x_B+x_c}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)\Rightarrow G\left(-\frac{2}{3};0\right)$

- Gọi H(x ; y) là trực tâm tam giác ABC. Khi đó: $\begin{cases}AH\perp BC\\ BH\perp CA\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA}=0\end{cases}$

  Từ đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases}x+y-2=0\\ x+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\ y=5\end{cases}$. Vậy H(–3 ; 5).

- Gọi I(x ; y) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

  Khi đó IA = IB = IC. Ta có hệ

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=(x+3)^2+(y+2)^2\\ (x-1)^2+(y-1)^2=x^2+(y-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8x+6y=11\\ -2x=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=-\frac{7}{6}\end{cases}$$

Vậy $I\left(\frac{1}{2};-\frac{5}{2}\right)$. Ta có $\overrightarrow{GH}=\left(-\frac{7}{3};5\right),\overrightarrow{GI}=\left(\frac{7}{6};-\frac{5}{2}\right)\Rightarrow\overrightarrow{GH}=-2\overrightarrow{GI}$.

Vậy ba điểm G, H, I thẳng hàng.

b) Bằng phương pháp chứng minh hình học phẳng ta thu được A′ là điểm đối xứng của trực tâm H qua BC. Giả sử A′(x ; y) và gọi M là trung điểm HA′.

Ta có $\overrightarrow{HA'}=(x+3;y-5)$

Do HA′ ⊥ BC nên $\overrightarrow{HA'}.\overrightarrow{BC}=\vec{0}\Leftrightarrow 3(x+3)+3(y-5)=0\Leftrightarrow x+y-2=0\Leftrightarrow y=-x+2$

Gọi M là trung điểm A′H.

Ta có $M\left(\frac{x-3}{2};\frac{y+5}{2}\right)\Rightarrow M\left(\frac{x+1}{2};\frac{-x+7}{2}\right)$. Khi đó $\overrightarrow{BM}=\left(\frac{x+7}{2};\frac{-x+11}{2}\right)$.

Hai vectơ $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng phương nên $3.\frac{x+7}{2}-3.\frac{-x+3}{2}=0\Leftrightarrow 2x-4=0\Leftrightarrow x=2$.

Từ đó A′(2 ; 0).

2.37. Cho ngũ giác ABCDE. Gọi F, G, H, I tương ứng là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE, X là trung điểm của đoạn FH và Y là trung điểm cạnh GI. Chứng minh rằng AE = 4XY.

Hướng dẫn giải

Ta xét tam giác ABC trong mpOxy với

$A(4a ; 4a'), B(4b ; 4b'), C(4c ; 4c'), D(4d ; 4d'), E(4e ; 4e')$.

Từ đó: $F(2a + 2b ; 2a' + 2b'), G(2b + 2c; 2b' + 2c')$,

$H(2c + 2d; 2c' + 2d'), I(2d + 2e; 2d' + 2e')$.

$X(a + b + c + d; a' + b' + c' + d'), Y(b + c + d + e; b' + c' + d' + e')$

Suy ra $XY=\sqrt{(e-a)^2+(e'-a')^2}$, $AE=\sqrt{(4e-4a)^2+(4e'-4a')^2}$.

Vậy AE = 4XY (đpcm).

2.38. Cho hình vuông ABCD. Gọi E là điểm tùy ý trên cạnh CD, P là hình chiếu vuông góc của E lên AC và Q là hình chiếu vuông góc của C lên AE. Chứng minh rằng ba điểm B, P, Q thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Không mất tính tổng quát, ta có thể xem độ dài cạnh của hình vuông là 1. Chọn hệ tọa độ có gốc B, trục hoành là tia BC, trục tung là tia BA.

Khi đó B(0; 0), A(0; 1), C(1; 0), D(1; 1), E(1; t) ở đây $0 \le t \le 1$.

Ta xác định tọa độ điểm P. Giả sử P(x ; y). Khi đó

$\overrightarrow{EP}=(x-1;y-t),\overrightarrow{AP}=(x;y-1),\overrightarrow{AC}=(1;-1)$

A, P, C thẳng hàng nên $x(-1)-(y-1)=0\Leftrightarrow x+y=1$.

Vì $EP\perp AC$ nên $\overrightarrow{EP}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow x-1-y+t=0\Leftrightarrow x-y=1-t$.

Do đó ta có hệ: $\begin{cases}x+y=1\\x-y=1-t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-\frac{t}{2}\\y=\frac{t}{2}\end{cases}\Rightarrow P\left(\frac{2-t}{2};\frac{t}{2}\right)$

Tương tự như thế ta tìm được toạ độ Q là $Q\left(\frac{2-t}{t^2-2t+2};\frac{t}{t^2-2t+2}\right)$

Để chứng minh B, P, Q thẳng hàng ta chứng minh $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{BQ}$ cùng phương.

Điều này là rõ ràng vì : $\overrightarrow{BP}=\frac{2}{t^2-2t+2}\overrightarrow{BP}$.

§3. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Cho tam giác ABC có các cạnh BC = a, CA = b, AB = c, m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài trung tuyến, h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài các đường cao xuất phát từ các đỉnh A, B, C của tam giác.

1. *Định lí côsin.*

a) Định lí côsin.

$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca.\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab.\cos C$$

b) Hệ quả.

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};\quad \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac};\quad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

2. *Định lí sin trong tam giác.*

a) Định lí sin. $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,

trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

b) Hệ quả.

+ $a=2R\sin A$; $b=2R\sin B$; $c=2R\sin C$.

+ $\sin A=\frac{a}{2R}$; $\sin B=\frac{b}{2R}$; $\sin C=\frac{c}{2R}$.

3. *Độ dài đường trung tuyến của tam giác.*

$$m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4};\quad m_b^2=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4};\quad m_c^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}.$$

4. *Diện tích tam giác.*

Diện tích S của tam giác ABC được tính bằng các công thức sau :

- $S=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c$
- $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$
- $S=\frac{abc}{4R}$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC)
- $S=pr$ (r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC)
- $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (công thức Hê-rông)

với $p=\frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi của tam giác ABC.

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính toán các yếu tố của tam giác.

- *Sử dụng định lí sin, định lí côsin,công thức trung tuyến , diện tích…*
- *Chuyển các yếu tố cần tính vào một tam giác cụ thể.*

Bài 25. Cho tam giác ABC có a = 10, b = 6. Độ dài đường cao qua C là $h_c = 4$.

Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác.

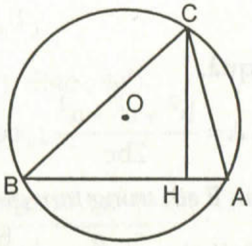
Giải.

Gọi R và S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và diện tích của tam giác ABC.

Ta có $S=\frac{1}{2}c.h_c=2c$.

Mặt khác $S=\frac{abc}{4R}$.

Từ đó $2c=\frac{abc}{4R}\Rightarrow R=\frac{ab}{8}=\frac{60}{8}=7{,}5$.



Bài 26. Cho tam giác ABC có $a=\frac{5}{2}$, $b=2$, $c=\frac{3}{2}$.

a) Tính cosB của tam giác ABC.

b) Gọi D là điểm đối xứng của B qua C. Tính độ dài AD và bán kính đường tròn qua ba điểm A, B, D.

Giải.

a) Ta có theo định lí côsin

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{2{,}25+6{,}25-4}{2.1{,}5.2{,}5}=\frac{4{,}5}{7{,}5}=\frac{3}{5}$$

b) Ta có BD = 2BC = 5. Áp dụng công thức trung tuyến, ta được

$$AC^2=\frac{AB^2+AD^2}{2}-\frac{BD^2}{4}\Rightarrow 4=\frac{2{,}25+AD^2}{2}-\frac{25}{4}$$

Từ đó ta được $AD^2=18{,}25\Rightarrow AD=\frac{\sqrt{73}}{2}$.

Gọi R là bán kính đường tròn qua ba điểm A, B, D. Theo định lí sin ta có $\frac{AD}{\sin\widehat{ABD}}=2R$. Mà $\sin\widehat{ABD}=\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$.

Vậy: $R=\frac{AD}{2\sin\widehat{ABD}}=\frac{\sqrt{73}}{4.\frac{4}{5}}=\frac{5\sqrt{73}}{16}$.

Bài 27. Cho tam giác ABC với giả thiết $\frac{a+b}{6}=\frac{b+c}{5}=\frac{c+a}{7}$.

Tính cosA, cosB, cosC.

Giải.

Giả sử $\frac{a+b}{6}=\frac{b+c}{5}=\frac{c+a}{7}=t$, suy ra $\begin{cases}a+b=6t\\b+c=5t\\c+a=7t\end{cases}$

Từ đó $a+b+c=9t$.

Vậy $c=3t$, $a=4t$, $b=2t$. Theo định lí côsin, ta có:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{4t^2+9t^2-16t^2}{2.2t.3t}=-\frac{1}{4};$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{9t^2+16t^2-4t^2}{2.3t.4t}=\frac{7}{8};$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{16t^2+4t^2-9t^2}{2.4t.2t}=\frac{11}{16}.$$

Bài 28. Cho tam giác ABC. M và N là hai điểm trên cạnh BC sao cho BN = NM = MC. Biết AN = 2, AM = 3 và $\widehat{MAN}=60^0$.

a) Tính diện tích và bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác AMN.

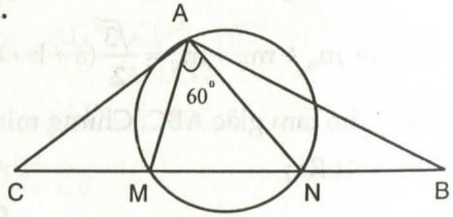
b) Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC.

Giải.

a) Ta có

$$S_{\Delta AMN}=\frac{1}{2}AM.AN.\sin\widehat{MAN}$$

$$=\frac{1}{2}.3.2.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$



Áp dụng định lí côsin cho ΔAMN :

$$MN^2=AM^2+AN^2-2AM.AN.\cos60^0=9+4-2.3.2.\frac{1}{2}=7$$

$MN=\sqrt{7}\Rightarrow BC=3\sqrt{7},\ BM=CN=2\sqrt{7}$

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN.

Khi đó, theo định lí sin, ta có :

$$\frac{MN}{\sin60^0}=2R\Rightarrow R=\frac{MN}{2\sin60^0}=\frac{\sqrt{7}}{2.\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$$

b) Áp dụng công thức trung tuyến cho tam giác ANC, ta có:

$$AM^2=\frac{AC^2+AN^2}{2}-\frac{CN^2}{4}\Rightarrow 4AM^2=2AC^2+2AN^2-CN^2$$

Từ đó $AC^2=\frac{4AM^2-2AN^2+CN^2}{2}=\frac{4.9-2.4+28}{2}=28$, hay $AC=2\sqrt{7}$

Tương tự như thế ta tính được $AB=\sqrt{13}$.

Dạng 2. Chứng minh hệ thức liên hệ giữa các yếu tố của tam giác. Sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác.

Bài 29. Cho tam giác ABC có $a^2+b^2=2c^2$.

Chứng minh rằng $m_a+m_b+m_c=\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)$.

Giải

Ta có $a^2+b^2=2c^2\Rightarrow\begin{cases}2(a^2+b^2)-c^2=3c^2\\2(b^2+c^2)-a^2=3b^2\\2(c^2+a^2)-b^2=3a^2\end{cases}$

Từ đó $m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{3b^2}{4}, m_b^2=\frac{3c^2}{4}, m_c^2=\frac{3a^2}{4}$

hay $m_a=\frac{\sqrt{3}}{2}b, m_b=\frac{\sqrt{3}}{2}c, m_c=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Suy ra $m_a+m_b+m_c=\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)$.

Bài 30. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

a) $abc=4pRr$; b) $ab+bc+ca=r^2+p^2+4Rr$.

Giải.

a) Suy trực tiếp từ $S=\frac{abc}{4R}=pr$.

b) Từ công thức Hê–rông, ta có $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$.

Thay $S=pr$ ta có: $p^2r^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$

Từ đó : $pr^2=(p-a)(p-b)(p-c)=p^3-(a+b+c)p^2+(ab+bc+ca)p-abc$

Để ý rằng $a+b+c=2p$ và $abc=4pRr$ nên

$pr^2=-p^3+p(ab+bc+ca)-4pRr$, hay $ab+bc+ca=r^2+p^2+4Rr$.

Bài 31. Cho tam giác ABC. Gọi S là diện tích của tam giác ABC. Chứng minh

a) $\cot A=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$; b) $\cot A+\cot B+\cot C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$

Giải

a) Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC, ta có

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A. \quad (1)$$

Ta lại có: $S=\frac{1}{2}bc.\sin A\Rightarrow 2bc=\frac{4S}{\sin A}$. (2)

Thay (2) vào (1), ta được $a^2=b^2+c^2-4S\cot A$

Do đó $\cot A=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$.

b) Theo câu a) ta có $\cot A=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$

Chứng minh tương tự ta có

$\cot B=\frac{a^2+c^2-b^2}{4S}$; $\cot C=\frac{b^2+a^2-c^2}{4S}$

Cộng các đẳng thức trên, vế theo vế ta thu được

$\cot A+\cot B+\cot C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$.

Bài 32. Cho tam giác ABC. D là một điểm nằm trên cạnh BC. Chứng minh hệ thức: $BC(AD^2+BD.CD)=AB^2.CD+AC^2.BD$ (Hệ thức Stewarts)

Giải

Áp dụng định lí côsin cho các tam giác ABC và ACD ta có:

$\cos\widehat{ADB}=\frac{AD^2+BD^2-AB^2}{2.AD.BD}$, $\cos\widehat{ADC}=\frac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD.CD}$

Vì $\widehat{ADB}+\widehat{ADC}=180^0$ nên $\cos\widehat{ADB}+\cos\widehat{ADC}=0$. Từ đó

$$\frac{AD^2+BD^2-AB^2}{2.AD.BD}+\frac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD.CD}=0$$

hay $CD\left(AD^2+BD^2-AB^2\right)+BD\left(AD^2+CD^2-AC^2\right)=0$. Suy ra

$$AB^2.CD+AC^2.BD=CD\left(AD^2+BD^2\right)+BD\left(AD^2+CD^2\right)$$

$$=BC\left(AD^2+BD.CD\right).$$

Nhận xét. *Từ hệ thức trên, nếu ta chọn D trùng với trung điểm M của cạnh BC thì ta có công thức độ dài của đường trung tuyến.*

> ***Dạng 3. Tính số đo góc từ định lí côsin và định lí sin***
>
> - *Thông thường, ta xác định các góc thông qua sin và côsin của chúng*
> - *Từ định lí côsin, ta có* $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.
>
>   *Từ định lí sin, ta có* $\sin A=\dfrac{a}{2R}$.
> - *Chú ý đến sin và côsin của các góc đặc biệt.*

Bài 33. Cho tam giác ABC thoả mãn điều kiện $\dfrac{a}{bc}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a+b-c}$.

Chứng minh rằng $\widehat{A}=60^0$.

Giải.

Từ giả thiết, ta có:

$$\frac{a}{bc}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{a+b-c}\Leftrightarrow\frac{a}{bc}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b-c}\Leftrightarrow\frac{a-b+c}{bc}=\frac{1}{a+b-c}$$

$$\Leftrightarrow(a-b+c)(a+b-c)=bc\Leftrightarrow a^2-(b-c)^2=bc\Leftrightarrow a^2=b^2+c^2-bc$$

Theo định lí côsin thì $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\Rightarrow\cos A=\dfrac{bc}{2bc}=\dfrac{1}{2}$.

Từ đó suy ra $\widehat{A}=60^0$.

Bài 34. Cho tam giác ABC nhọn thỏa mãn $2a\sin B=b\sqrt{3}$.

Chứng minh rằng $\widehat{A}=60^0$.

Giải.

Từ giả thiết suy ra: $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$

Theo định lí sin thì $\dfrac{a}{\sin a}=\dfrac{b}{\sin B}$

Do đó : $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}\Rightarrow\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\widehat{A}=60^0$

Bài 35. Tam giác có độ dài các cạnh là:

$\sqrt{a^2+b^2+2c^2},\sqrt{b^2+c^2+2a^2},\sqrt{c^2+a^2+2b^2}$ với a, b, c là độ dài cho trước. Chứng minh răng các góc của tam giác này đều nhọn.

Giải

Dễ thấy $\sqrt{a^2+b^2+2c^2},\sqrt{b^2+c^2+2a^2},\sqrt{c^2+a^2+2b^2}$ là độ dài ba cạnh của một tam giác .

Giả sử tam giác ABC có

$AB=\sqrt{a^2+b^2+2c^2},BC=\sqrt{b^2+c^2+2a^2},CA=\sqrt{c^2+a^2+2b^2}$

Khi đó

$$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB.AC}=\frac{a^2+b^2+2c^2+a^2+c^2+2b^2-b^2-c^2-2a^2}{2AB.AC}$$

$$=\frac{2(b^2+c^2)}{2AB.AC}>0$$

Suy ra A nhọn. Tương tự đối với hai góc B và C.

Bài 36. Cho tam giác ABC đều và một điểm P nằm bên trong tam giác sao cho PB ≠ PC. Các đường thẳng PB và PC lần lượt cắt AC và AB tương ứng tại D và E. Cho biết PB : PC = AD : AE. Tính góc BPC.

Giải.

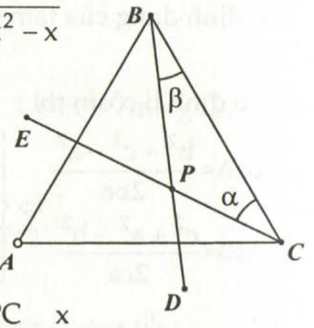
Ta có thể xem độ dài cạnh của tam giác ABC đều là 1.

Đặt AE = x, AD = y với $0<x,y<1$, $\widehat{BCE}=\alpha,\widehat{CBD}=\beta$

Từ định lý côsin ta có :

$$BD^2=AD^2+AB^2-2AD.AB\cos60^0\Rightarrow BD=\sqrt{1+y^2-y}$$

$$CE^2=AC^2+AE^2-2AC.AE\cos60^0\Rightarrow CE=\sqrt{1+x^2-x}$$



Lại áp dụng định lý sin cho BCD và EBC ta được

$$\frac{CD}{\sin\beta}=\frac{BD}{\sin60^0}\Rightarrow\sin\beta=\frac{1-y}{\sqrt{1+y^2-y}}.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{BE}{\sin\alpha}=\frac{CE}{\sin60^0}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2-x}}.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Trong tam giác BCP ta có: $\dfrac{PC}{\sin\beta}=\dfrac{PB}{\sin\alpha}\Rightarrow\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\dfrac{PC}{PB}=\dfrac{x}{y}$.

Suy ra $\dfrac{y-y^2}{\sqrt{1+y^2-y}}=\dfrac{x-x^2}{\sqrt{1+x^2-x}}\Leftrightarrow(y-y^2)^2(1+x^2-x)=(x-x^2)(1+y^2-y)$

Bằng cách đặt $a=x-x^2,b=y-y^2$, ta được:

$$a^2(1-b)=b^2(1-a)\Leftrightarrow(a-b)(ab-a-b)=0$$

Nếu $ab-a-b=0$ thì $(a-1)(b-1)=0$, mâu thuẫn.

Do đó $a=b$ hay $x-x^2=y-y^2\Leftrightarrow(x-y)(x+y-1)=0\Leftrightarrow x+y-1=0\Leftrightarrow y=1-x$

Từ đó AD = BE và do đó $\Delta ABD=\Delta BCE$, suy ra $\widehat{ABD}=\alpha$.

Vậy $\alpha+\beta=\widehat{ABC}=60^0\Rightarrow\widehat{BPC}=120^0$.

Dạng 4: Xác định dạng của tam giác

Bài 37. Cho tam giác ABC thoả mãn điều kiện $S = \dfrac{(a+b-c)(a-b+c)}{4}$

Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Giải.

Sử dụng công thức Hê–rông, ta có :

$$S = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4} \Leftrightarrow 16S^2 = (a+b-c)^2(a-b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow p(p-a)(p-b)(p-c) = (p-c)^2(p-b)^2$$

$$\Leftrightarrow p(p-a) = (p-c)(p-b) \Leftrightarrow p^2 - pa = p^2 - p(c+b) + bc$$

$$\Leftrightarrow p(c+b-a) = bc \Leftrightarrow (b+c+a)(b+c-a) = 2bc$$

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow$ tam giác ABC vuông tại A.

Bài 38. Cho tam giác ABC thoả mãn $(1-\cos A)(1-\cos B) = \dfrac{ab}{4c^2}$.

Xác định dạng của tam giác ABC.

Giải.

Theo định lí côsin thì :

$$\begin{cases} \cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-\cos A = \dfrac{a^2-(b-c)^2}{2bc} \\ 1-\cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \end{cases}$$

Từ đó $(1-\cos A)(1-\cos B) = \dfrac{\left[a^2-(b-c)^2\right]\left[b^2-(c-a)^2\right]}{4abc^2}$

Như thế từ giả thiết, ta có $\dfrac{\left[a^2-(b-c)^2\right]\left[b^2-(c-a)^2\right]}{4abc^2} = \dfrac{ab}{4c^2}$

hay $\left[a^2-(b-c)^2\right]\left[b^2-(c-a)^2\right] = a^2b^2$. (*)

Chú ý rằng $a^2-(b-c)^2 \le a^2,\ b^2-(c-a)^2 \le b^2$,

Nên $\left[a^2-(b-c)^2\right]\left[b^2-(c-a)^2\right] \le a^2b^2$

Như thế từ (*), ta có $\begin{cases} a^2-(b-c)^2 = a^2 \\ b^2-(c-a)^2 = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c$.

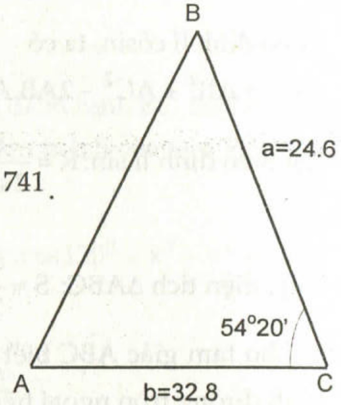
Vì vậy đẳng thức trên chứng tỏ rằng ABC là tam giác đều.

Dạng 5. Giải tam giác.

Sử dụng các công thức đã học để tính độ dài các cạnh và số đo các góc của tam giác.

Bài 39. Cho tam giác ABC biết a = 24,6 ; b = 32, 8 ; C = $54^0,20'$.

Tính cạnh c và các góc A, B của tam giác.



Giải.

Theo định lí côsin, ta có

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$c^2 = (24,6)^2 + (32,8)^2 - 2.24,6.32,8.\cos 54^0 20' \approx 741.$$

Từ đó $c \approx \sqrt{741} \approx 27,2$.

Áp dụng định lí sin ta có

$$\sin A = \frac{a\sin C}{c} \approx \frac{24,6.\sin 54^0 20'}{27,2} \approx 0,735$$

$\Rightarrow A \approx 47^0 3'$.

$$\sin B = \frac{b\sin C}{c} \approx \frac{32,8.\sin 54^0 20'}{27,2} \approx 0,98 \Rightarrow B \approx 78^0 3'.$$

Bài 40. Cho tam giác ABC biết a = 76,7 ; B = $78^0 2'$; C = $64^0 6'$. Tính góc A và các cạnh b, c.

Giải.

Ta có $A = 180^0 - (B+C) = 180^0 - (78^0 2' + 64^0 6') = 37^0 2'$

Sử dụng định lí sin ta có :

$$b = \frac{a\sin B}{\sin A} = \frac{76,7\sin 78^0 2'}{\sin 37^0 2'} \approx 124\ ; \quad c = \frac{a\sin C}{\sin A} = \frac{76,7\sin 64^0 6'}{\sin 37^0 2'} \approx 115.$$

Bài 41. Cho tam giác ABC biết a = 486, b = 475, c = 494.

Tính độ lớn các góc A, B, C.

Giải.

Sử dụng định lí côsin, ta có:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{475^2+494^2-486^2}{2.475.494} \approx 0,868 \Rightarrow A \approx 60^0 2'$$

$$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = \frac{494^2+486^2-475^2}{2.494.486} \approx 0,848 \Rightarrow B \approx 58^0$$

Từ đó tính được $C = 180^0 - (A+B) = 61^0 8'$.

C. LUYỆN TẬP

- **Tính toán các yếu tố của tam giác**

2.39. Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=60^o$, AB = 4, AC = 5. Tính BC, bán kính đường tròn ngoại tiếp R và diện tích S của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Theo định lí côsin, ta có

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC\cos A=16+25-2.4.5.\cos 60^0=21\Rightarrow BC=\sqrt{21}\,(cm)$$

Lại theo định lí sin: $R=\dfrac{BC}{2\sin A}=\dfrac{\sqrt{21}}{2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{7}$ (cm)

Vậy, diện tích ΔABC: $S=\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin A=\dfrac{1}{2}.4.5.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}\,(cm^2)$

2.40. Cho tam giác ABC biết $a=6cm$, $b=2\sqrt{6}cm$, $A=120^o$. Tính góc B và bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác.

Hướng dẫn giải

Theo định lí sin, ta có $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}\Rightarrow \sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{2\sqrt{6}.\sin 120^0}{6}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Vì B không thể là góc tù nên B= 45°.

Ta cũng có $R=\dfrac{a}{2\sin A}=\dfrac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$ (cm) và

2.41. Tính đường cao h_a và bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác ABC biết :

a) $\widehat{A}=30^0$, $b=5cm$, $c=3cm$;

b) $a=8cm$, $b=12cm$, $c=10cm$;

c) $a=2\sqrt{5}cm$, $b=3\sqrt{5}cm$, $c=4\sqrt{5}cm$;

d) $a=2\sqrt{7}cm$, $b=4cm$, $\cos B=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

Hướng dẫn giải

a) $h_a=\dfrac{20\sqrt{3}}{7}, R=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$.

b) $h_a=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}, R=\dfrac{16}{\sqrt{7}}$.

c) $h_a=\dfrac{15\sqrt{5}}{4}, R=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

d) $h_a=\dfrac{15}{4}, R=\dfrac{4\sqrt{7}}{3}$.

2.42. Tính các góc của tam giác ABC biết :

a) $a=\sqrt{6}cm$; $b=2cm$; $c=(\sqrt{3}+1)cm$;

b) $a=48{,}6$; $b=47{,}5$; $c=49{,}4$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{4+4+2\sqrt{3}-6}{4(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow A=60^0$;

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{4+2\sqrt{3}+6-4}{2\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow B=45^0.$$

Từ đó $C=75^0$.

b) $A\approx 60^0 2', B\approx 58^0, C\approx 61^0 8'$.

2.43. Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=120^0$. Gọi D là trung điểm cạnh BC. Biết AD = 1cm và chu vi tam giác ABC là $2(2+\sqrt{3})$cm. Tính diện tích S của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Đặt $AB=x, AC=y$. Khi đó: $BC^2=x^2+y^2-2xy.\cos 120^0=x^2+y^2+xy$.

Vậy $BC=\sqrt{x^2+y^2+xy}=\sqrt{(x+y)^2-xy}$. Từ đó

$$2\left(2+\sqrt{3}\right)=AB+BC+CA=x+y+\sqrt{(x+y)^2-xy}$$

Mặt khác, theo công thức trung tuyến, ta có:

$$AD^2=\frac{AB^2+AC^2}{2}-\frac{BC^2}{4}=\frac{2(x^2+y^2)-(x^2+y^2+xy)}{4}$$

Suy ra $(x+y)^2-3xy=4$. Đặt $S=x+y, P=xy$. Ta có hệ

$$\begin{cases}S+\sqrt{S^2-P}=2\left(2+\sqrt{3}\right)\\ S^2-3P=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S+\sqrt{\dfrac{2S^2+4}{3}}=2\left(2+\sqrt{3}\right)\\ P=\dfrac{S^2-4}{3}\end{cases}$$

Ta có $S+\sqrt{\dfrac{2S^2+4}{3}}=2\left(2+\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{2S^2+4}{3}}=4+2\sqrt{3}-S$

Bình phương hai vế và rút gọn, ta được phương trình:

$S^2-6\left(4+2\sqrt{3}\right)S+80+48\sqrt{3}=0\Leftrightarrow S=4$ hoặc $S=20+12\sqrt{3}$

- Xét $S=4$. Khi đó $P=4$.

  Diện tích tam giác ABC là $S=\dfrac{1}{2}AB.AC\sin A=\dfrac{1}{2}.4.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

- Xét $S=20+12\sqrt{3}$. Khi đó

  $AB+AC=x+y=20+12\sqrt{3}>2\left(2+\sqrt{3}\right)$. Vô lí.

Vậy diện tích tam giác là $S=\sqrt{3}\,(cm^2)$.

2.44. Đáy của một tam giác cân có độ dài là 6 , độ dài cạnh bên là 12. Tính diện tích S và bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác.

Hướng dẫn giải

$S=9\sqrt{17}\,, R=\frac{24}{\sqrt{17}}$.

2.45. Cho tam giác ABC với $a=6, b=7, c=5$.

a) Tính S, h_a, R.

b) Tính bán kính đường tròn qua A, C và trung điểm M của BC .

Hướng dẫn giải

a) Dễ dàng tính được $S=6\sqrt{6}\,, h_a=2\sqrt{6}\,, R=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

b) Ta có $AM^2=\frac{AB^2+AC^2}{2}-\frac{BC^2}{4}=\frac{25+49}{2}-\frac{36}{4}=37-9=28$

Áp dụng định lí côsin cho tam giác AMC, ta có:

$$\cos C=\frac{AC^2+MC^2-AM^2}{2AC.MC}=\frac{49+9-28}{2.7.3}=\frac{5}{7}$$

Từ đó ta tính được $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$

Gọi R_1 là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC.

Theo định lí sin, ta có: $\frac{AM}{\sin C}=2R_1\Rightarrow R_1=\frac{AM}{2\sin C}=\frac{2\sqrt{7}}{2.\frac{2\sqrt{6}}{7}}=\frac{7\sqrt{7}}{2\sqrt{6}}$.

2.46. Cho tam giác ABC cân tại A với $\widehat{A}=2\alpha, AB=a$. D là một điểm trên cạnh BC sao cho BC = 3BD.

a) Tính độ dài BC và AD.

b) Chứng minh rằng bán kính của đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD và ACD bằng nhau. Gọi R_1 và R lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABD và ABC. Xác định góc α sao cho $R=R_1\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

a) $BC=2a\sin\alpha$.

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABD, ta có:

$$AD^2=AB^2+BD^2-2AB.BD\sin B=a^2+\frac{4a^2}{9}\sin^2\alpha-2.a.\frac{2a}{3}\cos\alpha$$

Từ đó tính được $AD=\frac{a}{3}\sqrt{1+8\cos^2\alpha}$.

b) Áp dụng định lí sin cho hai tam giác ABD và ACD, ta được:

$$R_1=\frac{AD}{\sin B}, R_2=\frac{AD}{\sin C}$$

với R_1, R_2 là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABD và ΔACD.

Từ đó ta có $R_1=R_2$.

Ta có $R_1=\frac{AD}{2\sin B}=\frac{AD}{2\cos\alpha}=\frac{a\sqrt{1+8\cos^2\alpha}}{6\cos\alpha}$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

$$R=\frac{BC}{2\sin 2\alpha}=\frac{2a\sin\alpha}{2\sin 2\alpha}=\frac{a}{2\cos\alpha}$$

Theo giả thiết: $\sqrt{3}R_1=R\Leftrightarrow\frac{a}{2\cos\alpha}=\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{1+8\cos^2\alpha}}{6\cos\alpha}\Leftrightarrow\sqrt{3}=\sqrt{1+8\cos^2\alpha}$

Suy ra $3=1+8\cos^2\alpha\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\cos\alpha=\pm\frac{1}{2}$

Nếu $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$ thì $\alpha=120^0\Rightarrow A=2\alpha=240^0$. Vô lí.

Vậy $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ và ta có $\alpha=60^0$.

2.47. Cho tam giác ABC vuông tại B, $\widehat{A}=30^0$, a = 4. Gọi I là trung điểm cạnh BC, M và N là hai điểm nằm trên hai cạnh AB, AC sao cho tam giác IMN đều. Tính độ dài MN.

Hướng dẫn giải

Đặt MB = x , IM = y.

Ta có IB = IC = 2. Vì $\widehat{MIN}=60^0$ nên $\widehat{MIB}+\widehat{CIN}=120^0$.

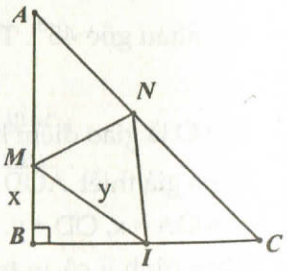
Do $C=60^0$ nên $\widehat{INC}+\widehat{CIN}=120^0$. Từ đó $\widehat{MIB}=\widehat{INC}=\alpha$.

Tam giác MIB vuông tại B nên $\frac{MB}{\sin\alpha}=IM\Rightarrow\frac{x}{\sin\alpha}=y$

Áp dụng định lí sin cho tam giác và NIC ta có

$$\frac{IC}{\sin\alpha}=\frac{IN}{\sin C}\Rightarrow\frac{2}{\sin\alpha}=\frac{y}{\sin C}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{\sin\alpha}$$

Từ đó ta có $\frac{x}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\alpha}\Rightarrow x=\sqrt{3}$



Như thế $MN^2=IM^2=IB^2+BM^2=4+3=7\Rightarrow MN=\sqrt{7}$.

2.48. Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=60^0$, $h_c=2\sqrt{3}$, $R=6$.

a) Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC.

b) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AHC.

Hướng dẫn giải

a) Theo định lí sin có $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow a = 2R.\sin A = 12.\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

Mặt khác $\sin A = \sin 60^0 = \frac{h_c}{b} \Rightarrow b = \frac{h_c}{\sin 60^0} = 4$

b) Ta có $\sin B = \frac{b}{2R} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Chú ý rằng $\sin\widehat{AHC} = \sin B = \frac{1}{3}$. Từ đó nếu gọi R_1 là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AHC thì $2R_1 = \frac{AC}{\sin\widehat{AHC}} = 12 \Rightarrow R_1 = 6$.

Chú ý. Có thể chứng minh được rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác AHC, CHB, BHA bằng nhau và đều bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

2.49. Cho tam giác ABC có AB = 6, BC = 7, CA = 8. M là điểm trên cạnh AB sao cho MA = 2MB.

a) Tính các góc của tam giác.

b) Tính S, R, r.

c) Tính bán kính đường tròn qua B, C và M.

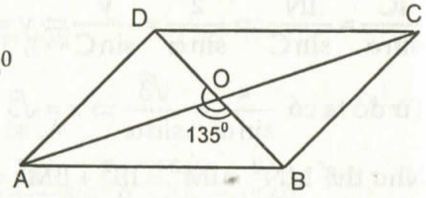
Hướng dẫn giải

a) $\cos A = \frac{17}{32}, \cos B = \frac{1}{4}$. b) $S = \frac{21\sqrt{3}}{4}, R = \frac{16\sqrt{3}}{3}, r = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp đường tròn qua B, C và M là $\frac{2}{3}\sqrt{138}$

2.50. Cho hình bình hành ABCD có $AD = \sqrt{2}, AB = \sqrt{10}$, hai đường chéo tạo với nhau góc 45^0. Tính độ dài hai đường chéo và diện tích hình bình hành.

Hướng dẫn giải



Gọi O là giao điểm hai đường chéo.

Theo giả thiết $\widehat{AOD} = 45^0 \Rightarrow \widehat{AOB} = 135^0$

Đặt OA = x, OD = y.

Theo định lí côsin trong hai tam giác AOD và AOB ta có

$$\begin{cases} AD^2 = x^2 + y^2 - 2xy.\cos 45^0 \\ AB^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 135^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - xy\sqrt{2} = 2 \\ x^2 + y^2 + xy\sqrt{2} = 10 \end{cases}$$

Cộng hai đẳng thức trên ta có $x^2 + y^2 = 6$.

Từ đó tính được $xy = 2\sqrt{2}$.

Như thế $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 6 + 4\sqrt{2} = \left(2+\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow x + y = 2 + \sqrt{2}$

Vậy ta có hệ : $\begin{cases} x + y = 2 + \sqrt{2} \\ xy = 2\sqrt{2} \end{cases}$

Vì ABCD không phải là hình chữ nhật nên ta có

$OA = x = \sqrt{2}, OD = y = 2\sqrt{2}$.

Vậy độ dài hai đường chéo là $AC = 2\sqrt{2}, BD = 4\sqrt{2}$.

2.51. Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn đường kính AC. Cho biết $BD = a$, $\widehat{CAB} = 45^0$, $\widehat{DAC} = 15^0$.

a) Tính độ dài đường chéo AC.

b) Tính diện tích tứ giác ABCD theo a.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{DAC} = 45^0 + 15^0 = 60^0$

Gọi R là bán kính đường tròn. Áp dụng định lí sin cho tam giác ABD, ta có

$$AC = 2R = \frac{BD}{\sin\widehat{BAD}} = \frac{a}{\sin 60^0} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

b) Ta có $S_{ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta CAD}$.

Tam giác ABC vuông cân tại B nên $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{AC^2}{4} = \frac{a^2}{3}$

Gọi O là tâm đường tròn. Khi đó

$S_{\Delta CAD} = 2S_{\Delta COD} = 2.\frac{1}{2}OC.OD.\sin 30^0 = \frac{a^2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{a^2}{6}$

Vậy $S_{ABCD} = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{6} = \frac{a^2}{2}$

- **Chứng minh hệ thức liên quan đến các yếu tố của tam giác**

2.52. Cho tam giác ABC, các khẳng định sau đây đúng hay sai:

a) Nếu a = 2b thì sinA = 2sinB ;

b) Nếu A=2B thì a = 2b ;

c) Nếu a = 2b + c thì sinA = 2sinB +sinC ;

d) Nếu a = bc thì sin A = sin B.sin C .

Hướng dẫn giải

a) Nếu a = 2b thì 2RsinA = 2RsinB hay sinA = 2sinB (đúng).

b) sai. c) đúng.

d) sai vì nếu a=bc thì $2R\sin A = 2R\sin B.2R\sin C$

hay $\sin A = 2R\sin B.\sin C$.

2.53. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng $S = 2R^2 \sin A.\sin B.\sin C$.

Hướng dẫn giải

Theo định lí sin ta có $\sin A = \dfrac{a}{2R}, \sin B = \dfrac{b}{2R}, \sin C = \dfrac{c}{2R}$.

Từ đó $S = \dfrac{abc}{4R} = \dfrac{2R\sin A.2R\sin B.2R\sin C}{4R} = 2R^2 \sin A.\sin B.\sin C$.

2.54. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

a) Nếu $a = b$ thì $c = 2b\cos A$;

b) Nếu $2a^2 = b^2$ thì $4\sin^2 A = \sin^2 B$;

c) Nếu $c^2 > a^2 + b^2$ thì C là góc tù ;

d) Nếu $a = R\sqrt{3}$ thì $b^2 + c^2 - bc = 3R^2$.

Hướng dẫn giải

a) Suy trực tiếp định lí côsin $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

b) Suy trực tiếp từ định lí sin: $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$.

c) Có $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} < 0 \Rightarrow C$ tù.

d) Nếu $a = R\sqrt{3}$ thì $b^2 + c^2 - bc = 3R^2$.

Theo định lí sin, ta có $\dfrac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \sin A = \dfrac{a}{2R} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2R} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Từ đó có $A = 60^0$. Lại theo định lí côsin, ta có

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ hay $b^2 + c^2 - bc = 3R^2$

2.55. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3\left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right).$$

Hướng dẫn giải

Theo công thức trung tuyến, ta có $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$.

Từ đó $GA^2 = \left(\dfrac{2}{3}m_a\right)^2 = \dfrac{4}{9}m_a^2 = \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}\right) = \dfrac{2}{9}(b^2 + c^2) - \dfrac{a^2}{9}$

Tương tự $GB^2 = \dfrac{2}{9}(c^2 + a^2) - \dfrac{b^2}{9}, GC^2 = \dfrac{2}{9}(a^2 + b^2) - \dfrac{c^2}{9}$

Suy ra $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$.

2.56. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

a) $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{r}$; b) $S = \dfrac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin(B + C)}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $2S = ah_a = bh_b = ch_c \Rightarrow h_a = \dfrac{2S}{a}, h_b = \dfrac{2S}{b}, h_c = \dfrac{2S}{c}$.

Từ đó $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{a}{2S} + \dfrac{b}{2S} + \dfrac{c}{2S} = \dfrac{a + b + c}{2S} = \dfrac{2p}{2S} = \dfrac{1}{r}$.

b) Chú ý rằng các góc A và B + C là bù nhau nên $\sin(B + C) = \sin A$.

Từ đó $S = \dfrac{abc}{4R} = \dfrac{a^2bc}{4Ra} = \dfrac{a^2(2R\sin B)(2R\sin C)}{4R.(2R\sin A)} = \dfrac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin A} = \dfrac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin(B + C)}$.

2.57. Cho tứ giác ABCD có góc giữa AC và BD là α. Chứng minh rằng diện tích tứ giác được tính theo công thức $S = \dfrac{1}{2}AC.BD.\sin\alpha$.

Hướng dẫn giải

Gọi I là giao điểm của AC và BD. Theo giả thiết $\widehat{AIB} = \alpha$. Ta có:

$S_{\Delta IAB} = \dfrac{1}{2}IA.IB\sin\alpha, S_{\Delta IBC} = \dfrac{1}{2}IB.IC\sin(180^0 - \alpha) = \dfrac{1}{2}IB.IC\sin\alpha$;

$S_{\Delta ICD} = \dfrac{1}{2}IC.ID\sin\alpha, S_{\Delta IDA} = \dfrac{1}{2}ID.IA\sin(180^0 - \alpha) = \dfrac{1}{2}ID.IA\sin\alpha$.

Từ đó

$S = S_{\Delta IAB} + S_{\Delta IBC} + S_{\Delta ICD} + S_{\Delta IDA} = (IA.IB + IB.IC + IC.ID + ID.IA)\sin\alpha$

$= (IA + IC)(IB + ID)\sin\alpha = AC.BD\sin\alpha$.

2.58. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi M là trung điểm AB và giả sử $MA^2 = MG.MC$.

a) Chứng minh rằng độ dài các cạnh của tam giác ABC thoả mãn $a^2 + b^2 = 2c^2$

b) Chứng minh rằng $\dfrac{m_a}{m_b} = \dfrac{b}{a}$.

Hướng dẫn giải

a) Từ giả thiết, ta có $\left(\dfrac{c}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{3}m_c.m_c = \dfrac{m_c^2}{3} = \dfrac{1}{12}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$

Từ đó ta có $a^2 + b^2 = 2c^2$.

b) Sử dụng công thức trung tuyến, ta có:

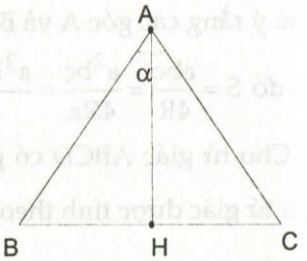
$$m_a^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}=\frac{2b^2+a^2+b^2-a^2}{4}=\frac{3b^2}{4}\Rightarrow m_a=\frac{b\sqrt{3}}{2};$$

$$m_b^2=\frac{2c^2+2a^2-b^2}{4}=\frac{a^2+b^2+2a^2-b^2}{4}=\frac{3a^2}{4}\Rightarrow m_b=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Từ đó suy ra đpcm.

2.59. Cho tam giác ABC cân tại A với AB = AC = a và $\widehat{BAC}=\alpha$. Chứng minh rằng bán kính đường tròn nội tiếp tam giác là $r=\dfrac{a\sin\alpha}{2\left(1+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

Hướng dẫn giải



Gọi H là trung điểm BC. Ta có $\sin\widehat{BAH}=\dfrac{BH}{AB}$

$\Rightarrow BC=2BH=2AB\sin\widehat{BAH}=2a\sin\dfrac{\alpha}{2}$

Diện tích của tam giác ABC là

$S=\dfrac{1}{2}ABAC.\sin A=\dfrac{1}{2}a^2\sin\alpha$.

Chu vi tam giác ABC là

$$2p=AB+AC+BC=2a\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\Rightarrow p=a\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Vậy : $r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{\dfrac{a^2}{2}\sin\alpha}{a\left(1+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}=\dfrac{a\sin\alpha}{2\left(1+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

2.60. Cho tam giác ABC thoả mãn b + c = 2a. Chứng minh rằng

a) $\sin B+\sin C=2\sin A$;

b) $\dfrac{2}{h_a}=\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}$

Hướng dẫn giải

a) Do b + c = 2a nên áp dụng định lí sin, ta có:
$a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$.
Từ đó $2R\sin B+2R\sin C=2R\sin A$.

b) Ta có $2S=ah_a=bh_b=ch_c\Rightarrow a=\dfrac{2S}{h_a},b=\dfrac{2S}{h_b},c=\dfrac{2S}{h_c}$

Từ đó theo giả thiết : $b+c=2a\Rightarrow\dfrac{4S}{h_a}=\dfrac{2S}{h_b}+\dfrac{2S}{h_c}\Rightarrow\dfrac{2}{h_a}=\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}$.

2.61. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp I. Chứng minh rằng :

a) $r=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$;

b) $CI=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}$.

Hướng dẫn giải

a) Theo định lí sin có $\dfrac{a}{2R}=\sin A=2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$.

Xét ΔAIM (M là tiếp điểm của AB với đường tròn nội tiếp), ta có:

$\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{p-a}{AI}$

Từ đó có : $\sin^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{ar}{4R(p-a)}$

Tương tự $\sin^2\dfrac{B}{2}=\dfrac{br}{4R(p-b)}$, $\sin^2\dfrac{C}{2}=\dfrac{cr}{4R(p-c)}$. Như vậy

$$\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}=\frac{abcr^3}{(4R)^3(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Để ý rằng $S=\dfrac{abc}{4R}=pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Suy ra

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

b) Ta có $CI=\dfrac{r}{\sin\dfrac{C}{2}}=\dfrac{4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}$.

2.62. Cho tam giác ABC có các cạnh BC = a, CA = b và AB = c.

a) Chứng minh rằng các tổng a + b, b + c và a + b + c là độ dài ba cạnh của một tam giác DEF.

b) Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có góc B là góc tù thì tam giác DEF có ba góc nhọn.

Hướng dẫn giải

a) Đặt x = a + b, y = b + c và z = a + b + c.
Ta có x + y = a + 2b + c > a + b + c = z
y + z = a + 2b + 2c > a + b = x
z + x = 2a + 2b + c > b + c = y
Vậy x = a + b, y = b + c và z = a + b + c là độ dài của 3 cạnh một tam giác DEF.

b) Trong tam giác DEF ta có z > x và z > y.
Do đó muốn chứng minh ΔDEF có ba góc nhọn ta chỉ cần chứng minh:
$x^2+y^2>z^2$.
Ta có: $x^2+y^2=a^2+b^2+2ab+b^2+c^2+2bc$
$z^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
Suy ra $x^2+y^2-z^2=b^2-2ac$ (1).

* Tam giác ABC có góc B tù ⇔ $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} < 0$

$\Leftrightarrow a^2+c^2-b^2<0 \Leftrightarrow b^2>a^2+c^2$.

(1) $\Rightarrow x^2+y^2-z^2 = b^2-2ac > a^2+c^2-2ac = (a-c)^2 \geq 0$.

Suy ra $x^2+y^2>z^2$ (2).

Vì $z > x$ và $z > y$ nên ta có

$x^2+z^2>x^2+y^2>y^2$ (3)

$y^2+z^2>y^2+x^2>x^2$ (4).

Từ (2), (3), (4) suy ra $\cos D > 0$, $\cos E > 0$ và $\cos F > 0$.

Vậy nếu ΔABC có góc B tù thì ΔDEF có ba góc nhọn.

2.63*. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng $\cos A+\cos B+\cos C = 1+\frac{r}{R}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{r}{R} = \frac{S}{pR} = \frac{4S^2}{pabc} = \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$

$= \frac{1}{2abc}\left[a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)-2abc\right]$

$= \cos A+\cos B+\cos C-1$.

2.64. Cho tứ giác ABCD nội tiếp được trong đường tròn. Gọi E là điểm trên tia DC sao cho DE = AB, F là điểm trên tia BC sao cho BF = AD. Gọi M là trung điểm EF. Chứng minh rằng MB ⊥ MD.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BF}\right)$;

$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DF}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BF}\right)$.

Từ đó $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{DM} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BD}\right)\left(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BD}\right) = \frac{1}{4}\left[\left(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BF}\right)^2-\overrightarrow{BD}^2\right]$

$= \frac{1}{4}\left[\left(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BF}\right)^2-\overrightarrow{BD}^2\right] = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{DE}^2+\overrightarrow{BF}^2+2\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{BF}-BD^2\right)$

$\frac{1}{4}\left(AB^2+AD^2-2AB.AD\cos A-BD^2\right)=0$ (Định lí côsin cho ΔABD).

Vậy BM ⊥ DM.

2.65*. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi D, E là hai điểm thay đổi lần lượt trên hai cạnh AB, AC.

a) Giả sử AE = BD = x $(0 < x < a)$. Tính DE theo a và x.

b) Giả sử D, E thay đổi và luôn tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\frac{AD}{DB}+\frac{AE}{EC}=1$.

Hướng dẫn giải

a) Tam giác ADE có $\widehat{A}=60^0$, $AD = a-x$, $AE = x$.

Áp dụng định lí côsin vào ΔADE ta có

$DE^2 = AD^2+AE^2-2AD.AE.\cos 60^0$

$= (a-x)^2+x^2-2.(a-x)x.\frac{1}{2} = a^2-3ax+3x^2$

Do đó $DE = \sqrt{a^2-3ax+3x^2}$.

b) Dễ thấy ED + BC = BD + CE. Suy ra ED = BD + CE − a.

Định lí côsin cho tam giác ADE có

$ED^2 = AE^2+AD^2-2AE.AD\cos 60^0$

Từ đó $(BD+CE-a)^2 = (a-CE)^2+(a-BD)^2-(a-CE)(a-BD)$

$\Rightarrow a = \frac{3BD.CE}{BD+CE}$.

Vì thế $AD = a-BD = \frac{BD(2CE-BD)}{BD+CE}$, $AE = a-CE = \frac{CE(2BD-CE)}{BD+CE}$

Vậy $\frac{AD}{DB}+\frac{AE}{EC} = \frac{2CE-BD}{BD+CE}+\frac{2BD-CE}{BD+CE}=1$.

- **Tính góc của tam giác từ định lí sin và định lí côsin**

2.66. Cho tam giác ABC thoả mãn điều kiện $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{l_a}$ (*l_a* là độ dài phân giác góc A). Tính góc A của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Dựng đường phân giác AM của ΔABC, đặt $\widehat{BAC}=2\alpha$, ta có

$\widehat{BAM}=\alpha$, $\widehat{CAM}=\alpha$. Khi đó $S_{BAM}=\frac{1}{2}c.l_a.\sin\alpha$, $S_{CAM}=\frac{1}{2}b.l_a.\sin\alpha$

Ta có $S_{BAC}=\frac{1}{2}bc.\sin 2\alpha = \frac{1}{2}c.l_a.\sin\alpha+\frac{1}{2}b.l_a.\sin\alpha$

Từ đó $bc\sin 2\alpha = l_a\sin\alpha(b+c) \Leftrightarrow \frac{\sin 2\alpha}{l_a}=\sin\alpha\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Vì $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{l_a}$ nên $\frac{\sin 2\alpha}{l_a}=\frac{\sin\alpha}{l_a} \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \sin\alpha$ (*)

Vì $\alpha \neq 0^o$ nên (*) cho ta $2\alpha = 180^o-\alpha \Leftrightarrow \alpha = 60^o$. Vậy $A = 120^0$.

2.67. Cho tam giác ABC thoả mãn $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}+\frac{a}{bc}$.

Chứng minh rằng $\widehat{A}=120^0$.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}+\frac{a}{bc}\Leftrightarrow\frac{b+c-a}{bc}=\frac{1}{a+b+c}\Leftrightarrow(a+b+c)(b+c-a)=bc$$

$$\Leftrightarrow(b+c)^2-a^2=bc\Leftrightarrow a^2=b^2+c^2+bc$$

Mặt khác, từ định lí côsin $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

Vậy $\cos A=-\frac{1}{2}\Rightarrow A=120^0$.

2.68. Cho tam giác ABC thoả mãn $a^2=\frac{a^3-b^3-c^3}{a-b-c}$. Chứng minh $\widehat{A}=60^0$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có

$$a^3-a^2(b+c)=a^3-b^3-c^3\Leftrightarrow a^2(b+c)=(b+c)(b^2-bc+c^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2=b^2-bc+c^2$$

Theo định lí côsin ta có $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

nên từ đó: $\cos A=\frac{1}{2}\Rightarrow A=60^0$.

2.69. Cho tam giác ABC thoả mãn $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}=\frac{3}{a+b+c}$.

Chứng minh rằng $\hat{B}=60^0$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}=\frac{3}{a+b+c}\Leftrightarrow\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}=3$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{c}{a+b}+1+\frac{a}{b+c}=3\Leftrightarrow\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}=1$$

$$\Leftrightarrow c(b+c)+a(a+b)=(a+b)(b+c)\Leftrightarrow c^2+a^2-b^2=ac$$

$$\Leftrightarrow\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos B=\frac{1}{2}\Leftrightarrow B=60^0.$$

2.70. Cho tam giác ABC thoả mãn $a^4+b^4+c^4=2a^2b^2+2a^2c^2$.

Tính góc A của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$a^4+b^4+c^4=2a^2b^2+2a^2c^2\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2+2b^2c^2=2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow(a^2-b^2-c^2)^2=2b^2c^2\Leftrightarrow a^2-b^2-c^2=\pm bc\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\cos A=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\Leftrightarrow A=45^0$ hoặc $A=135^0$.

2.71. Cho tam giác ABC thoả mãn $bc=2a^2\sin B.\sin C$. Tính góc A.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết có $\frac{b}{\sin B}=\frac{\sin C}{c}.2a^2$

Theo định lí sin : $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

Từ đó $\frac{b}{\sin B}=\frac{\sin B}{b}.2a^2\Rightarrow\left(\frac{b}{\sin B}\right)^2=2a^2\Rightarrow\left(\frac{a}{\sin A}\right)^2=2a^2$

$$\Rightarrow\sin^2 A=\frac{1}{2}\Rightarrow\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vậy $A=45^0$ hoặc $A=135^0$.

2.72. Cho tam giác ABC thoả $S=\frac{(a-b+c)(a+b-c)\sin A}{2}$. Tính góc A.

Hướng dẫn giải

Thay $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ vào $S=\frac{(a-b+c)(a+b-c)\sin A}{2}$, rút gọn ta được:

$$(a-b+c)(a+b-c)=bc\Leftrightarrow a^2=b^2+c^2-bc$$

Kết hợp với định lí côsin, ta được $\cos A=\frac{1}{2}\Rightarrow A=60^0$.

2.73*. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Gọi P là điểm nằm bên trong tam giác thoả mãn $PC^2=PA^2+2PB^2$. Tính góc APB.

Hướng dẫn giải

Gọi x là cạnh hình vuông. Đặt PA = a, PB = b, PC = c. Góc $\widehat{ABP}=\alpha$.

Từ giả thiết ta có $c^2=a^2+2b^2$. (1)

Theo định lí côsin cho tam giác ABP, ta có:

$$a^2=x^2+b^2-2bx\cos\alpha\Rightarrow 2bx\cos\alpha=x^2+b^2-a^2$$

Cũng áp dụng định lí côsin cho tam giác PBC, ta có:

$$c^2=b^2+x^2-2bx\cos\widehat{PBC}=b^2+x^2-2bx\cos(90^0-\alpha)=b^2+x^2-2bx\sin\alpha$$

Suy ra $2bx\sin\alpha = x^2 + b^2 - c^2 = x^2 - a^2 - b^2$ (suy được từ (1))

Từ đó

$$4b^2x^2 = 4b^2x^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$$
$$= (x^2 - a^2 - b^2)^2 + (x^2 + b^2 - a^2)^2 = 2(x^2 - a^2)^2 + 2b^4$$

Hay $x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + a^4 + b^4 = 0.$ (2)

Xem (2) là phương trình ẩn x, ta được

$x^2 = a^2 + b^2 - ab\sqrt{2}$ hoặc $x^2 = a^2 + b^2 + ab\sqrt{2}$

Định lí côsin cho tam giác ABP, ta lại có:

$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{APB}.$

Từ đó : $\cos\widehat{APB} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{APB} = 135^0$; $\cos\widehat{APB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{APB} = 45^0.$

- **Xác định dạng của tam giác.**

2.74. Cho tam giác ABC thoả mãn $4m_a^2 = b^2 + c^2$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Hướng dẫn giải

Giả sử tam giác ABC thoả mãn

$$4m_a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow 4\left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) = b^2 + c^2.$$

Hay $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

2.75. Cho tam giác ABC thoả mãn $\dfrac{1 + \cos B}{\sin B} = \dfrac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}}$.

Xác định dạng của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Giả sử tam giác ABC thoả mãn

$$\frac{1 + \cos B}{\sin B} = \frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}} \Leftrightarrow \frac{(1 + \cos B)^2}{\sin^2 B} = \frac{(2a + c)^2}{4a^2 - c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 + \cos B)^2}{1 - \cos^2 B} = \frac{2a + c}{2a - c} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos B}{1 - \cos B} = \frac{2a + c}{2a - c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1 - \cos B} = \frac{4a}{2a - c} \Leftrightarrow \cos B = \frac{c}{2a} \Leftrightarrow \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{c}{2a}$$

$\Leftrightarrow c^2 + a^2 - b^2 = c^2 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại C .

2.76. Xác định dạng của tam giác ABC biết:

a) $\dfrac{\sin C}{\sin B} = 2\cos A$; b) $\cos A = \dfrac{2\sin B\sin C - \sin^2 A}{2\sin B\sin C}$.

Hướng dẫn giải

a) Theo định lí sin và côsin

$$\sin C = \frac{c}{2R},\ \sin B = \frac{b}{2R},\ \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Như thế hệ thức đã cho trở thành

$\dfrac{c}{b} = 2.\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Leftrightarrow c^2 = b^2 + c^2 - a^2 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \Delta$ ABC cân tại C.

b) Giả sử tam giác ABC thoả mãn $\cos A = \dfrac{2\sin B\sin C - \sin^2 A}{2\sin B\sin C}$

Sử dụng định lí sin, ta có:

$$\frac{2\sin B\sin C - \sin^2 A}{2\sin B\sin C} = \frac{2.\dfrac{b}{2R}.\dfrac{c}{2R} - \left(\dfrac{a}{2R}\right)^2}{2.\dfrac{b}{2R}.\dfrac{c}{2R}} = \frac{2bc - a^2}{2bc} = 1 - \frac{a^2}{2bc}$$

Từ giả thiết $\cos A = 1 - \dfrac{a^2}{2bc}$. Theo định lí côsin $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Ta có $1 - \dfrac{a^2}{2bc} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Leftrightarrow 2bc - a^2 = b^2 + c^2 - a^2 \Leftrightarrow b = c$

Vậy ΔABC cân tại A.

2.77. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông nếu

a) $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$; b) $\cos B + \cos C = \dfrac{b + c}{a}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C \Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{2R}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{2R}\right)^2 = \left(\dfrac{c}{2R}\right)^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$

Vậy ΔABC vuông tại C.

b) Giả sử tam giác ABC thoả mãn $\cos B + \cos C = \dfrac{b + c}{a}$

Theo định lí côsin, ta có $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$, $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

Do đó $\cos B + \cos C = \dfrac{b + c}{a} \Leftrightarrow \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \dfrac{b + c}{a}$

$\Leftrightarrow b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) = 2bc(b + c)$

$\Leftrightarrow bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 = 2bc(b + c) + b^3 + c^3$

$\Leftrightarrow (b + c)(a^2 + bc) = (b + c)(b^2 - bc + c^2 + 2bc)$

$a^2 + bc = b^2 + c^2 + bc \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

2.78. Cho tam giác ABC thoả mãn $S = (p-a)(p-b)$.

Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết: $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = (p-a)(p-b)$

$\Leftrightarrow p(p-a)(p-b)(p-c) = (p-a)^2(p-b)^2$

$\Leftrightarrow p(p-c) = (p-a)(p-b) \Leftrightarrow p^2 - pc = p^2 - p(a+b) + ab$

$\Leftrightarrow (a+b-c)p = ab \Leftrightarrow (a+b-c)(a+b+c) = 2ab$

$\Leftrightarrow (a+b)^2 - c^2 = 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại C.

2.79. Chứng minh rằng tam giác ABC đều nếu

a) $4\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right) = (a+b+c)^2$; b) $a^2 + b^2 + c^2 = 2R(m_a + m_b + m_c)$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có

$$4\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right) = 4\left(\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{b^2+a^2}{2} - \frac{c^2}{4}\right) = 3(a^2+b^2+c^2)$$

Do đó $4\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right) = (a+b+c)^2 \Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2) = (a+b+c)^2$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c$

Vậy ΔABC đều.

b) Ta chứng minh với mọi ΔABC đều có $b^2 + c^2 \le 4Rm_a$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC cân tại A.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp và D là trung điểm BC.

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ODA, ta có:

$$\cos\widehat{OAD} = \frac{OA^2 + AD^2 - OD^2}{2OA.AD} \Rightarrow OA^2 + AD^2 - OD^2 \le 2OA.AD$$

Mặt khác theo công thức trung tuyến $AD^2 = m_a^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$

Hơn nữa $OD^2 = OB^2 - BD^2 = R^2 - \dfrac{a^2}{4}$

Suy ra $R^2 + \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4} - R^2 \le 2R.m_a \Leftrightarrow b^2 + c^2 \le 4Rm_a$

Tương tự, ta có hai bất đẳng thức $c^2 + a^2 \le 4Rm_b$, $a^2 + b^2 \le 4Rm_c$

Cộng cả ba bất đẳng thức trên vế theo vế, ta được

$$a^2 + b^2 + c^2 \le 2R(m_a + m_b + m_c)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

2.80. Cho tam giác ABC

a) Chứng minh rằng $8(p-a)(p-b)(p-c) \le abc$.

b) Chứng minh rằng tam giác ABC đều khi và chỉ khi $R = 2r$.

Hướng dẫn giải

a) Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\sqrt{(p-a)(p-b)} \le \frac{p-a+p-b}{2} = \frac{c}{2};$$

$$\sqrt{(p-a)(p-b)} \le \frac{p-a+p-b}{2} = \frac{c}{2};$$

$$\sqrt{(p-a)(p-b)} \le \frac{p-a+p-b}{2} = \frac{c}{2}.$$

Nhân theo vế ba bất đẳng thức trên ta được bất đẳng thức cần chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

b) Ta có $R = 2r \Leftrightarrow \dfrac{abc}{4S} = 2.\dfrac{S}{p} \Leftrightarrow p.abc = 8S^2$

Hay (theo câu a))

$$abc = 8(p-a)(p-b)(p-c) \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

2.81. Cho tam giác ABC nhọn có độ dài ba cạnh thoả mãn:

$$2(a^2 - ab + b^2) = c^2$$

Chứng minh rằng tam giác ABC vuông cân.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết và định lí côsin, ta có:

$$2(a^2 - ab + b^2) = c^2 \Leftrightarrow 2(a^2 - ab + b^2) = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Do đó $\cos C = \dfrac{(a-b)^2}{-2ab} \le 0$

Nếu $a \ne b$ thì $\cos C < 0$, suy ra C tù (mâu thuẫn).

Do đó ta phải có $a = b$, từ đó $\cos C = 0$ hay $C = 90^0$.

Vậy tam giác ABC vuông cân tại C.

2.82*. Cho tam giác ABC có $\dfrac{r}{r_a} = \dfrac{1}{3}, \dfrac{r}{R} = \dfrac{2}{5}$.

Chứng minh rằng tam giác ABC vuông

Hướng dẫn giải

Ta có $\dfrac{r}{r_a} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{p-a}{p} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 3(p-a) = p \Leftrightarrow 2p = 3a$

Từ đó $a + b + c = 3a$ hay $b + c = 2a$.

Như thế $\frac{r}{R}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow\frac{\frac{S}{p}}{\frac{abc}{4S}}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow\frac{4S^2}{pabc}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc}=\frac{2}{5}$

Kết hợp với b + c = 2a ta có

$$\frac{\frac{1}{2}a.\frac{3c-b}{2}.\frac{3b-c}{2}}{abc}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow\frac{(3c-b)(3b-c)}{8bc}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow\frac{10bc-3(b^2+c^2)}{bc}=\frac{16}{5}$$

$$\frac{10bc-3(b^2+c^2)}{bc}=\frac{16}{5}\Leftrightarrow\frac{16bc-3(b+c)^2}{bc}=\frac{16}{5}\Leftrightarrow 16-12.\frac{a^2}{bc}=\frac{16}{5}$$

$$\Leftrightarrow\frac{b}{a}.\frac{c}{a}=\frac{15}{16}$$

Kết hợp với $\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=2$, ta suy ra $\frac{b}{a},\frac{c}{a}$ là các nghiệm của phương trình bậc hai $t^2-2t+\frac{16}{5}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{5}{4}\\t=\frac{3}{4}\end{array}\right.$

- $\frac{b}{a}=\frac{5}{4},\frac{c}{a}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{a}{4}=\frac{b}{5}=\frac{c}{3}\Rightarrow$ tam giác ABC đồng dạng với tam giác có ba cạnh là 4, 5, 3. Suy ra tam giác ABC vuông tại B.
- $\frac{b}{a}=\frac{3}{4},\frac{c}{a}=\frac{5}{4}\Rightarrow\frac{a}{4}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5}\Rightarrow$ tam giác ABC đồng dạng với tam giác có ba cạnh là 4, 3, 5. Suy ra tam giác ABC vuông tại C.

2.83. Cho tam giác ABC với $b + c = 6$, diện tích $S = a^2 - (b - c)^2$.

a) Tính cosA;

b) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích S.

Hướng dẫn giải

a) Từ công thức Hê-rông, ta có:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=a^2-(b-c)^2\Leftrightarrow 30bc=17(b^2+c^2-a^2)$$

Suy ra $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{15}{17}$

b) Ta có $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{8}{17}$

Như thế $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}.\frac{8}{17}bc\le\frac{4}{17}\left(\frac{b+c}{2}\right)^2=\frac{36}{17}$

Vậy max $S=\frac{36}{17}$ khi tam giác ABC có $b=c=3$, $a=\frac{6}{\sqrt{17}}$.

2.84. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

a) $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=\frac{1}{2Rr}$

b) $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}=\frac{1}{p}+\frac{abc}{S^2}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{2p}{4RS}=\frac{p}{2R.pr}=\frac{1}{2Rr}$

b) $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}-\frac{1}{p}=\frac{(p-b)+(p-a)}{(p-b)(p-a)}+\frac{p-(p-c)}{p(p-c)}$

$$=\frac{2p-a-b}{(p-a)(p-b)}+\frac{c}{p(p-c)}=c\left[\frac{1}{(p-a)(p-b)}+\frac{1}{p(p-c)}\right]=$$

$$=c.\frac{p(p-c)+(p-a)(p-b)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=c.\frac{2p^2-p(a+b+c)+ab}{S^2}=\frac{abc}{S^2}$$

§4. BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG II

2.85*. Cho tam giác ABC có AB = 22, BC = 19, CA = 13.

a) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh $AG^2 + CG^2 = BG^2$.

b) Tìm tập hợp những điểm M sao cho $AM^2 + CM^2 = BM^2$

c) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của BM nếu $AM^2 + CM^2 = BM^2$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}=\frac{3}{2}\sqrt{105}$,

$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}=\frac{39}{2},m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}=12.$$

Từ đó $AG=\frac{2}{3}m_a=\sqrt{105}$, $BG=\frac{2}{3}m_b=13$, $CG=\frac{2}{3}m_c=8$

Suy ra $AG^2+CG^2=BG^2$.

b) Gọi E là trung điểm AC và D là điểm đối xứng của B qua E.

Ta có $4ME^2=2MA^2+2MC^2-AC^2=2MB^2+2MD^2-BD^2$

Giả sử M thoả mãn $AM^2+CM^2=BM^2$. Khi đó

$$2MD^2=BD^2-AC^2=4BE^2-AC^2=4.\left(\frac{39}{2}\right)^2-13^2=1352\Rightarrow MD=26.$$

Vậy tập hợp M là đường tròn (C) tâm D , bán kính R = 26 .

c) Đường tròn (C) cắt BD tại hai điểm I, K (I nằm trên đoạn BD và K nằm ngoài đoạn BD). Theo câu b) thì M nằm trên đường tròn (C). Dễ dàng thấy rằng BM lớn nhất khi $M \equiv K$ $(BM = 65)$ và BM nhỏ nhất khi $M \equiv I$ $(BM = 13)$.

2.86. Cho tam giác ABC có trọng tâm G.

a) Với điểm M tùy ý, chứng minh rằng

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

b) Tìm tập hợp những điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k^2$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 = MG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA};$

$$MB^2 = \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 = MG^2 + GB^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB};$$

$$MC^2 = \overrightarrow{MC}^2 = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 = MG^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}.$$

Cộng ba đẳng thức trên vế theo vế với chú ý rằng $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, ta có điều phải chứng minh.

b) Giả sử $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k^2 \Leftrightarrow 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = k^2$

$$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{GA^2 + GB^2 + GC^2 - k^2}{3}$$

- Nếu $GA^2 + GB^2 + GC^2 - k^2 < 0$ thì không tồn tại M
- Nếu $GA^2 + GB^2 + GC^2 - k^2 = 0$ thì $M \equiv G$
- Nếu $GA^2 + GB^2 + GC^2 - k^2 > 0$ thì tập hợp M là đường tròn tâm G, bán

kính là $\sqrt{\dfrac{GA^2 + GB^2 + GC^2 - k^2}{3}}$.

2.87. Cho hình bình hành ABCD. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} = 0.$$

Ngược lại, hãy chứng minh rằng nếu tứ giác ABCD thoả mãn điều kiện trên thì ABCD là hình bình hành.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD}\right) - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) - \overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) = \vec{0}$

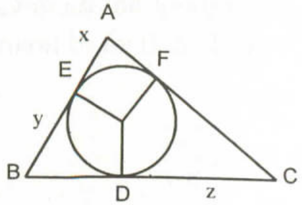
$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow$ ABCD là hình bình hành.

2.88*. Bán kính đường tròn nội tiếp của một tam giác ABC là $r = 1$. Biết độ dài các cạnh và nửa chu vi của tam giác là các số nguyên. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác vuông.

Hướng dẫn giải



Đặt $x = AE$, $y = BE = BD$,

$z = CD = CF$ (xem hình vẽ).

Ta có : $x = \dfrac{b + c - a}{2}$, $y = \dfrac{a + c - b}{2}$, $z = \dfrac{b + a - c}{2}$.

Theo công thức Hêrông :

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, ngoài ra $S = pr = p = \dfrac{a + b + c}{2}$.

Suy ra $p = (p - a)(p - b)(p - c)$, hay $x + y + z = xyz$ (1), với $x, y, z \in \mathbb{N}$.

Chú ý rằng $x = p - a$, $y = p - b$, $z = p - c$ là các số tự nhiên.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x \le y \le z$, khi đó $xy \le 3$.

+ $x = y = 1 \Rightarrow 2 + z = z$: vô lí.

+ $x = 1, y = 2$: (1) $\Rightarrow 3 + z = 2z$. Ta có $z = 3 \Rightarrow a = 5, b = 4, c = 3$.

+ $x = 1, y = 3$: (1) $\Rightarrow 4 + z = 3z \Rightarrow z = 2 < y$: mâu thuẫn.

Vậy ΔABC có $a = 5, b = 4, c = 3$, đây là tam giác vuông tại A.

2.89. Cho $A(3\,;-2)$, $B(1\,;1)$, $C(-3\,;6)$.

a) Tìm M trên trục hoành sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ nhỏ nhất.

b) Tìm N trên trục tung sao cho $|\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} + 3\overrightarrow{NC}|$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

a) Lấy $M(x;0)$ trên trục hoành.

Ta có $\overrightarrow{MA} = (3 - x;-2)$, $\overrightarrow{MB} = (1 - x;1) \Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (4 - 2x;-1)$

Từ đó $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{(4 - 2x)^2 + 1} \ge 1$.

Suy ra $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất là 1 khi $4 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Điểm cần tìm là $M(2\,;0)$.

b) Lấy $N(0\,;y)$ trên trục tung. Tương tự như câu a), ta tính được

$\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} + 3\overrightarrow{NC} = (-4;18 - 6y)$

Từ đó: $\left|\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} + 3\overrightarrow{NC}\right| = \sqrt{16 + (18 - 6y)^2} \ge 4$

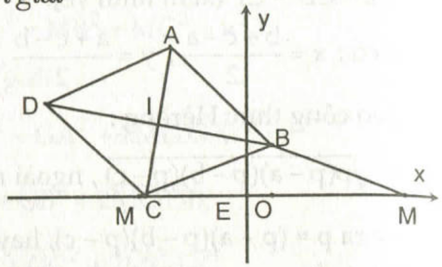
Do đó $\left|\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} + 3\overrightarrow{NC}\right|$ nhỏ nhất là 4 khi $N(0;3)$.

2.90. Cho hai điểm $A(-3\,;6)$ và $B\left(1;\dfrac{9}{4}\right)$.

a) Tìm điểm M trên trục tung sao cho tích vô hướng $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất.

b) Tìm điểm hai điểm C, D sao cho ACBD là hình thoi, trong đó C nằm trên trục hoành và có hoành độ âm.

Hướng dẫn giải



a) $M\left(0;\dfrac{33}{8}\right)$.

b) Giả sử $C(x;0)$. Gọi I là trung điểm AC.

Khi đó $I\left(\dfrac{-3+x}{2};3\right)$

và $\overrightarrow{BI}=\left(\dfrac{-5+x}{2};\dfrac{3}{4}\right)$, $\overrightarrow{AC}=(x+3;-6)$

Ta có ABCD là hình thoi $\Leftrightarrow BI\perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AC}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+3)(-5+x)}{2}-6.\frac{3}{4}=0 \Leftrightarrow x^2-2x-24=0.\quad (*)$$

(*) có 2 nghiệm $x=-4$ và $x=6$. Vì C có hoành độ âm nên $C(-4;0)$.

Từ đó ta có điểm $D\left(-8;\dfrac{15}{4}\right)$.

2.91. Cho $A(2;4)$, $B(1;1)$, $C(3;-3)$.

a) Tìm điểm D sao cho ABCD là hình thang vuông tại A và D.

b) Tìm điểm E trên đường thẳng BC sao cho $AE\perp BC$. Tính diện tích của tam giác CED.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử $D(x\,;y)$. Ta có $\overrightarrow{AD}=(x-2;y-4)\Rightarrow AD=\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}$

$\overrightarrow{DC}=(3-x;-3-y)$, $\overrightarrow{AB}=(-1;-3)\Rightarrow BC=\sqrt{10}$

Từ giả thiết suy ra $AB\perp AD$ và $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ cùng phương

Như thế $\begin{cases}(-1)(x-2)-3(y-4)=0\\ \dfrac{3-x}{-1}=\dfrac{-3-y}{-3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+3y=14\\ 3x-y=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\ y=3\end{cases}$

Theo yêu cầu ABCD là hình thang vuông tại A và D, bằng cách kiểm tra trực tiếp, ta dễ dàng có $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow AD\perp BC$, thoả mãn yêu cầu bài toán. Vậy $D(5;3)$.

b) Giả sử $E(x\,;y)$. Ta có

$$\overrightarrow{EB}=(1-x;1-y), \overrightarrow{BC}=(2;-4), \overrightarrow{AE}=(x-2;y-4)$$

Do hai vectơ trên cùng phương nên

$$-4(1-x)-2(1-y)=0\Rightarrow 2x+y-3=0$$

Lại do AE vuông góc với BC nên

$$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow 2(x-2)-4(y-4)=0\Leftrightarrow x-2y+6=0$$

Do đó ta có hệ $\begin{cases}2x+y-3=0\\ x-2y+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=3\end{cases}$. Vậy $E(0;3)$.

Ta có $\overrightarrow{CE}=(-3;6)$, $\overrightarrow{CD}=(2;6)$

Suy ra

$$\cos\widehat{ECD}=\cos\left(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CD}\right)=\frac{\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{CE}\right|\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\frac{(-3)2+6.6}{\sqrt{9+36}.\sqrt{36+36}}=\frac{30}{18\sqrt{10}}=\frac{5}{3\sqrt{10}}$$

Từ đó $\sin\widehat{CED}=\sqrt{1-\cos^2\widehat{CED}}=\sqrt{1-\dfrac{25}{90}}=\sqrt{\dfrac{65}{90}}$

Diện tích tam giác CED là

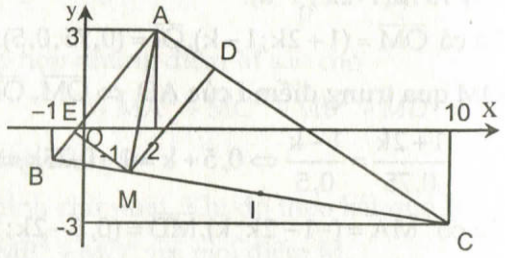
$$S=\frac{1}{2}CE.CD\sin\widehat{CED}=\frac{1}{2}.3\sqrt{5}.6\sqrt{2}.\sqrt{\frac{65}{90}}=3\sqrt{65}.$$

2.92. Cho tam giác ABC với $A(2\,;3)$, $B(-1\,;-1)$, $C(10\,;-3)$.

a) Chứng minh rằng tam giác ABC vuông, suy ra tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Tìm điểm M trên cạnh BC sao cho DE có độ dài nhỏ nhất với D, E lần lượt là hình chiếu của M lên AC, AB.

Hướng dẫn giải



a) Ta có

$\overrightarrow{AB}=(-3;-4)$, $\overrightarrow{AC}=(8;-6)$;

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-3.8+(-4)(-6)=0$

$\Rightarrow$ Tam giác ABC vuông tại A.

Tâm đường tròn ngoại tiếp là

$I\left(\dfrac{9}{2};-2\right)$ (trung điểm BC).

b) Ta có ADME là hình chữ nhật nên $AM=DE$.

Như thế DE nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ AM nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ AM vuông góc với BC $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của A lên BC. Từ đó ta tìm được $M\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{-7}{5}\right)$.

2.93. Cho tam giác ABC với $A(-4;3)$, $B(1\,;1)$, $C(-5\,;4)$.

a) Tìm điểm M trên trục hoành sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

b) Tìm hai điểm P, Q trên cạnh BC sao cho AP, AQ chia tam giác ABC thành ba tam giác có diện tích bằng nhau.

Hướng dẫn giải

a) Gọi G là trọng tâm của ΔABC. Khi đó

$|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|=|3\overrightarrow{MG}|=3MG$. Do đó $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất

⇔ M là hình chiếu của G lên trục hoành : Ta tìm được $M\left(-\dfrac{8}{3};0\right)$.

b) Các tam giác ABP, APQ, AQC có cùng chiều cao AH của ΔABC, do đó chúng có diện tích bằng nhau ⇔ BP = PQ = QC.

Từ đó $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Ta tìm được P(−1;2), Q(−3;3).

2.94. Cho A(0 ; 1), B(1 ; 1), C(3 ; 0), E(0,5 ; 1,5). Gọi D là trung điểm OC và M là điểm trên cạnh BC sao cho BM = kBC $(0<k<1)$.

a) Tìm x sao cho đường thẳng OM qua trung điểm của AD.

b) Tìm x sao cho tam giác MAD vuông cân tại M.

c) Tìm x để các tam giác ABD và DEM có cùng trọng tâm.

Hướng dẫn giải

a) Ta có D(1,5 ; 0). Trung điểm AD là I(0,75 ; 0,5)

Giả sử M(x ; y). Ta có $\overrightarrow{BC}=(2;-1),\overrightarrow{BM}=(x-1;y-1)$. Ta có

$$\overrightarrow{BM}=k\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=2k\\y-1=-k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+2k\\y=1-k\end{cases}$$

Suy ra M(1+2k ; 1−k).

Ta có $\overrightarrow{OM}=(1+2k;1-k),\overrightarrow{OI}=(0,75;0,5)$.

OM qua trung điểm I của AD ⇔ $\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OI}$ cùng phương, đo đó

$$\frac{1+2k}{0,75}=\frac{1-k}{0,5}\Leftrightarrow 0,5+k=1-0,75k\Leftrightarrow 1,75k=0,5\Leftrightarrow k=\frac{1}{7}.$$

b) Ta có $\overrightarrow{MA}=(-1-2k;k),\overrightarrow{MD}=(0,5-2k;k-1)$.

Như thế tam giác MAD vuông tại M khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MD}=0\Leftrightarrow-(1+2k)(0,5-2k)+k(k-1)=0$$

$$\Leftrightarrow 5k^2-0,5=0\Leftrightarrow k^2=\frac{1}{10}\Leftrightarrow k=\frac{1}{\sqrt{10}}\ (\text{vì } 0<k<1).$$

c) Trọng tâm của ΔABD là $G\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{2}{3}\right)$.

Trọng tâm của tam giác OEM là

$$G'\left(\frac{0,5+1+2k}{3};\frac{1,5+1-k}{3}\right)\Rightarrow G'\left(\frac{1,5+2k}{3};\frac{2,5-k}{3}\right)$$

Ta có $G\equiv G'\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1,5+2k}{3}=\dfrac{5}{6}\\\dfrac{2,5-k}{3}=\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow k=\dfrac{1}{2}.$

2.95. Cho tam giác ABC vuông tại A có bán kính đường tròn nội tiếp r, biết $AB=a\sqrt{3},AC=a$. Phân giác trong góc A cắt BC tại M. Tính AM và r.

Hướng dẫn giải

Tính AM: Diện tích tam giác ABC là $S=\dfrac{1}{2}AB.AC=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $S_{\Delta ABM}=\dfrac{1}{2}AB.AM\sin 45^0$, $S_{\Delta ACM}=\dfrac{1}{2}AC.AM\sin 45^0$.

$\Rightarrow S=S_{\Delta ABM}+S_{\Delta ACM}\Rightarrow\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}=\dfrac{AM}{4}\left(a\sqrt{6}+a\sqrt{2}\right)$

Vậy $AM=\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\dfrac{a\left(3\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{2}$.

- Tính r : Ta có $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{3a^2+a^2}=2a$.

Chu vi tam giác ABC là $2p=AB+BC+CA=a\left(3+\sqrt{3}\right)\Rightarrow p=\dfrac{a\left(3+\sqrt{3}\right)}{2}$.

Từ đó bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{a\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$.

2.96*. Cho tứ giác lồi ABCD. Tìm tập hợp những điểm M sao cho

a) $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$; b) $MA^2+MC^2+MB^2+MD^2=k^2$.

Hướng dẫn giải

a) *Trường hợp 1.* Tứ giác ABCD là hình chữ nhật. Khi đó theo kết quả bài 2.19 câu b), ta luôn có $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$ với mọi điểm M.

Như vậy, nếu tứ giác ABCD là hình chữ nhật thì tập hợp điểm thoả $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$ là mọi điểm M của mặt phẳng.

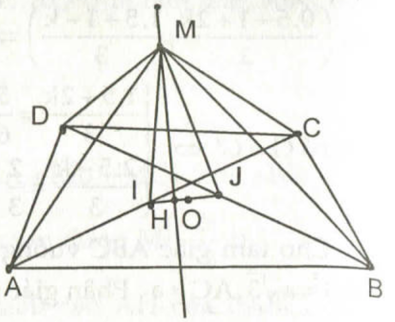
Trường hợp 2. Tứ giác ABCD không phải là hình chữ nhật. Gọi I và J lần lượt là trung điểm AC và BD, O là trung điểm IJ.

Cho M là điểm thoả mãn $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$ (1).

Theo *công thức trung tuyến* trong tam giác, ta có:

$(1) \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AC^2}{2} = 2MJ^2 + \frac{BD^2}{2}$.

Do đó $MI^2 - MJ^2 = \frac{BD^2 - AC^2}{4} = k$.



Áp dụng câu b) bài 14 dạng 4 §2, ta suy ra tập hợp những điểm M là đường thẳng vuông góc với IJ tại điểm H xác định bởi $\overline{OH}.2\overline{IJ} = k$.

b) Với mọi điểm M, theo *công thức trung tuyến,* ta có:

$$MA^2 + MC^2 + MB^2 + MD^2 = 2MI^2 + \frac{AC^2}{2} + 2MJ^2 + \frac{BD^2}{2}$$

$$= 2\left(2MO^2 + \frac{IJ^2}{2}\right) + \frac{1}{2}(AC^2 + BD^2) = 4MO^2 + IJ^2 + \frac{1}{2}(AC^2 + BD^2)$$

Do đó, cho điểm M thoả $MA^2 + MC^2 + MB^2 + MD^2 = k^2$.

Ta có: $MO^2 = \frac{1}{4}\left(k^2 - IJ^2 - \frac{1}{2}(AC^2 + BD^2)\right)$

Đặt $m = IJ^2 + \frac{1}{2}(AC^2 + BD^2)$, khi đó $MO^2 = \frac{1}{4}(k^2 - m^2)$.

i) $k^2 < m^2$ thì tập các điểm M là tập rỗng.

ii) $k^2 = m^2$ thì tập các điểm M là điểm O.

iii) $k^2 < m^2$ thì tập các điểm M là đường tròn tâm O, bán kính bằng

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - m^2}.$$

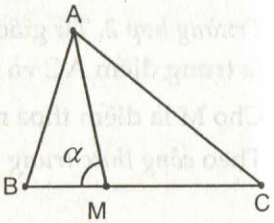
2.97. Cho tam giác ABC có diện tích S. Gọi M là điểm trên cạnh BC (không trùng với B và C). Gọi R_1 và R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABM và ACM. Giả sử $\widehat{AMB} = \alpha$. Chứng minh rằng

a) $\frac{R_1}{R_2} = \frac{AB}{AC}$;　　　b) $S = \frac{1}{2}AM.BC\sin\alpha$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng định lí sin cho các tam giác ABM và ACM, ta có:

$\frac{AB}{\sin\widehat{AMB}} = 2R_1$ và $\frac{AC}{\sin\widehat{AMC}} = 2R_2$. (*)



Vì $\widehat{AMC} = \pi - \widehat{AMB} = \pi - \alpha$

nên $\sin\widehat{AMB} = \sin\widehat{AMC} = \sin\alpha$.

Từ đó (*) suy ra điều phải chứng minh.

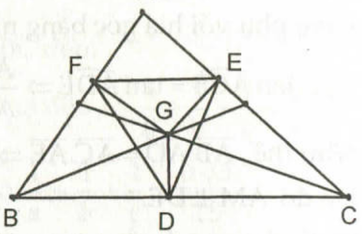
b) $S = S_{\Delta ABM} + S_{\Delta ACM} = \frac{1}{2}AM.MB\sin\alpha + \frac{1}{2}AM.MC\sin\alpha$

$= \frac{1}{2}AM.\sin\alpha(MB + MC) = \frac{1}{2}AM.BC\sin\alpha.$

2.98. Cho tam giác ABC nhọn có trọng tâm G . Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của G lên ba cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng

$$S_{DEF} = \frac{S}{9}\left(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C\right) \text{ với } S = S_{ABC}.$$

Hướng dẫn giải



Ta có $S_{\Delta BGC} = \frac{S}{3} = \frac{BC.GD}{2} \Rightarrow GD = \frac{2S}{3a}$

Tương tự, ta có: $GE = \frac{2S}{3b}, GF = \frac{2S}{3c}$

Tứ giác GEAF nội tiếp

nên $A + \widehat{EGF} = 180^0 \Rightarrow \sin\widehat{EGF} = \sin A$.

Từ đó

$$S_{\Delta GEF} = \frac{1}{2}GE.GF\sin\widehat{EGF} = \frac{1}{2}.\frac{2S}{3b}.\frac{2S}{3c}.\sin A = \frac{2S^2}{9bc}\sin A$$

Tương tự như trên, ta có: $S_{\Delta GFD} = \frac{2S^2}{9ca}\sin B, S_{\Delta GDE} = \frac{2S^2}{9ab}\sin C$

Như thế $S_{\Delta DEF} = S_{\Delta GEF} + S_{\Delta GFD} + S_{\Delta GDE} = \frac{2S^2}{9}\left(\frac{\sin A}{bc} + \frac{\sin B}{ca} + \frac{\sin C}{ab}\right)$

Mặt khác $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$.

Suy ra $bc = \frac{2S}{\sin A}, ca = \frac{2S}{\sin B}, ab = \frac{2S}{\sin C}$

Do đó $S_{\Delta DEF} = \frac{S}{9}\left(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C\right)$.

2.99. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Đường tròn tâm H bán kính AH cắt đường thẳng AB tại D và cắt AC tại E. Trung tuyến AM của tam giác ABC cắt DE tại I. Chứng minh

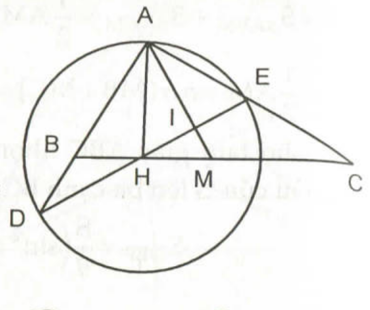
a) $\overline{DH} = \frac{1}{2}\overline{DE}$;　　　b)* $AM \perp DE$.

Hướng dẫn giải

a) Vì $\widehat{DAE} = 90^0$ nên DE là đường kính của đường tròn.

Do đó D, H, E thẳng hàng.

Ta lại có $DE = 2DH$ nên $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{DH}$



b) Vì M là trung điểm BC nên $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Ta lại có $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$. Từ đó

$$2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DE} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}\right)$$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} =$$

$$= -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE}$$

(Vì $AB \perp AE, AC \perp AD$).

Mặt khác tam giác AHE cân tại H nên $\widehat{HAE} = \widehat{HEA}$, từ đó $\widehat{ACB} = \widehat{ADE}$ vì cùng phụ với hai góc bằng nhau.

Vậy $\tan\widehat{ACB} = \tan\widehat{ADE} \Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AD} \Rightarrow AB.AD = AC.AE$

Như thế $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE} \Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DE} = 0$

Do đó $AM \perp DE$.

2.100. Chứng minh rằng tam giác ABC đều nếu

a) $\dfrac{a}{\cos A} = \dfrac{b}{\cos B} = \dfrac{c}{\cos C}$; b)* $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{1}{4r^2}$.

Hướng dẫn giải

a) $\dfrac{a}{\cos A} = \dfrac{b}{\cos B} = \dfrac{c}{\cos C} \Leftrightarrow \dfrac{2R\sin A}{\cos A} = \dfrac{2R\sin B}{\cos B} = \dfrac{2R\sin C}{\cos C}$

$\Leftrightarrow \tan A = \tan B = \tan C$.

Dễ thấy tam giác ABC không có góc tù. Do đó $A = B = C$ (đpcm).

b) Giả sử tam giác ABC thoả mãn $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{1}{4r^2}$

Ta có

$$\frac{1}{4r^2} = \frac{p^2}{4S^2} = \frac{(a+b+c)^2}{16p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{a+b+c}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}$$

$$= \frac{(a+b-c)+(b+c-a)+(c+a-b)}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} =$$

$$= \frac{1}{(a+b-c)(b+c-a)} + \frac{1}{(b+c-a)(c+a-b)} + \frac{1}{(c+a-b)(a+b-c)}$$

$$= \frac{1}{b^2-(c-a)^2} + \frac{1}{c^2-(b-a)^2} + \frac{1}{a^2-(b-c)^2} \geq \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, nghĩa là tam giác ABC đều.

2.101*. Chứng minh rằng trong tất cả các tam giác có cùng bán kính đường tròn nội tiếp thì tam giác đều có chu vi nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Ta có $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr \Leftrightarrow (p-a)(p-b)(p-c) = pr^2$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số không âm p−a, p−b, p−c ta được

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} = \frac{3p-(a+b+c)}{3} = \frac{p}{3}$$

Từ đó $pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c) \leq \dfrac{p^3}{27} \Rightarrow 2p \geq 6r\sqrt{3}$

Vậy chu vi ΔABC nhỏ nhất bằng $6r\sqrt{3} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

2.102. a) Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta đều có $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} < \dfrac{p}{S}$.

b)* Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta có $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \leq \dfrac{p\sqrt{3}}{2S}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C \leq \dfrac{1}{2}ab \Rightarrow \dfrac{1}{a} \leq \dfrac{b}{2S}$

Tương tự ta cũng có $\dfrac{1}{b} \leq \dfrac{c}{2S}, \dfrac{1}{c} \leq \dfrac{a}{2S}$

Cộng các bất đẳng thức trên ta được: $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} < \dfrac{a+b+c}{2S} = \dfrac{p}{S}$.

b) Đặt $a = x+y, b = y+z, c = z+x (x, y, z > 0)$. Ta có

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{xy}} + \frac{1}{2\sqrt{yz}} + \frac{1}{2\sqrt{zx}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}\right)^2 \leq \frac{3}{4}\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)$$

Mặt khác, $\dfrac{p}{S} = \dfrac{x+y+z}{\sqrt{(x+y+z)xyz}} = \sqrt{\dfrac{x+y+z}{xyz}} = \sqrt{\dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{zx}}$

Vì vậy $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \leq \dfrac{p\sqrt{3}}{2S}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Chương 3

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

§1. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT, PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Phương trình tổng quát của đường thẳng

1. Vectơ pháp tuyến của đường thẳng

Vectơ $\vec{n}$ khác vectơ $\vec{0}$, có giá vuông góc với đường thẳng Δ được gọi là *vectơ pháp tuyến* của đường thẳng Δ.

2. Phương trình tổng quát của đường thẳng

Phương trình của đường thẳng Δ qua $I(x_0; y_0)$ nhận $\vec{n} = (a ; b)$ làm vectơ pháp tuyến là :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \text{ với } a^2 + b^2 \neq 0 \quad (1)$$

Khai triển (1) : $ax + by + c = 0$ với $a^2 + b^2 \neq 0$ (2) $c = -(ax_0 + by_0)$.

Phương trình (2) được gọi là *phương trình tổng quát* của Δ.

3. Các dạng đặc biệt của phương trình tổng quát

- Cho đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$, với $a^2 + b^2 \neq 0$, ta có :
  - * $\Delta : ax + c = 0 \Rightarrow \Delta \perp Ox$;
  - * $\Delta : ay + c = 0 \Rightarrow \Delta \perp Oy$.

  Suy ra phương trình Ox : $y = 0$; phương trình Oy : $x = 0$.
- Δ qua $A(a ; 0)$ và $B(0 ; b)$ với $a.b \neq 0$ thì Δ có phương trình

  $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 . \quad (3)$$

  (3) được gọi là *phương trình đường thẳng theo đoạn chắn.*
- Δ qua $B(0 ; b)$ và có hệ số góc k có phương trình $y = kx + b$. Ta có hệ số góc $k = \tan\alpha$, với α là góc giữa tia Ox và Δ.

II. Phương trình tham số của đường thẳng

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Vectơ $\vec{u}$ khác $\vec{0}$, có giá song song hoặc trùng với đường thẳng Δ được gọi là *vectơ chỉ phương* của Δ.

2. Phương trình tham số của đường thẳng

* Đường thẳng Δ đi qua $M(x_0; y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a ; b)$ có :

- Phương trình tham số : $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$ (1)
- Phương trình chính tắc : $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$ (2)

* *Chú ý :*

+ $a = 0$ hoặc $b = 0$ thì Δ không có phương trình chính tắc.

+ Đường thẳng Δ: $ax + by + c = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (b; -a)$.

III. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Muốn xét sự tương giao của hai đường thẳng

$\Delta_1 = a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $\Delta_2 = a_2x + b_2y + c_2 = 0$

Ta giải hệ $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 & (1) \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 & (2) \end{cases}$

Lập $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$; $D_x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$; $D_y = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$. Ta có :

- * Δ_1 và Δ_2 cắt nhau $\Leftrightarrow$ Hệ có 1 nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow D \neq 0$.
  - * $\Delta_1 \mathbin{/\mkern-6mu/} \Delta_2 \Leftrightarrow$ Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow D = 0$ và $D_x \neq 0$ (hoặc $D_y \neq 0$).
  - * $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow$ Hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow D = D_x = D_y = 0$.
- Trường hợp đặc biệt : a_2, b_2, c_2 đều khác 0, ta có :
  - * Δ_1 và Δ_2 cắt nhau $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.
  - * $\Delta_1 \mathbin{/\mkern-6mu/} \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$.
  - * $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 1. Lập phương trình tổng quát, phương trình tham số của đường thẳng.

- *Để lập phương trình tổng quát của đường thẳng ta tìm một điểm của đường thẳng và một vectơ pháp tuyến của nó.*
- *Để lập phương trình tham số của đường thẳng ta tìm một điểm của đường thẳng và một vectơ chỉ phương của nó.*

Bài 1. Lập phương trình tổng quát, phương trình chính tắc, phương trình tham số của đường thẳng trong mỗi trường hợp sau đây:

a) Đi qua $M(3; -1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 4)$;

b) Đi qua $M(3; -1)$ và vuông góc với đường thẳng BC, trong đó $B(-1; 3)$, $C(2; 5)$.

Giải.

a) Đường thẳng qua M(3; −1) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;4)$, vectơ chỉ phương của đường thẳng là $\vec{u}=(-4;2)$. Do đó đường thẳng có :

+ Phương trình tổng quát: $2(x-3)+4(y+1)=0 \Leftrightarrow 2x+4y-2=0$.

+ Phương trình tham số : $\begin{cases}x=3-4t\\ y=-1+2t\end{cases}$

+ Phương trình chính tắc: $\dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y+1}{2}$

b) Đường thẳng đi qua M(3;−1) và vuông góc với đường thẳng BC suy ra vectơ pháp tuyến của đường thẳng là $\overrightarrow{BC}=(3;2)$, vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-3)$. Do đó đường thẳng có:

+ Phương trình tổng quát:

$$3(x-3)+2(y+1)=0 \Leftrightarrow 3x+2y-7=0$$

+ Phương trình tham số : $\begin{cases}x=3+2t\\ y=-1-3t\end{cases}$

+ Phương trình chính tắc: $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-3}$

Bài 2. Lập phương trình tổng quát, phương trình chính tắc, phương trình tham số của đường thẳng trong mỗi trường hợp sau đây:

a) Đi qua $M(3;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(4;-1)$;

b) Đi qua hai điểm $A(-3;2)$ và $B(1;-2)$.

Giải

a) Đường thẳng qua $M(3;-1)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(4;-1)$ nên có

+ Phương trình tham số : $\begin{cases}x=3+4t\\ y=-1-t\end{cases}$

+ Phương trình chính tắc : $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-1}{-1}$

+ Từ phương trình chính tắc, ta suy được phương trình tổng quát như sau :

$$1(x-3)+4(y+1)=0 \Leftrightarrow x+4y+1=0$$

b) Đường thẳng qua $A(-3;2)$ và $B(1;-2)$ nên nhận $\overrightarrow{AB}=(4;-4)$ hay $\vec{u}=(1;-1)$ làm vectơ chỉ phương, có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1)$. Do đó đường thẳng có:

+ Phương trình tham số: $\begin{cases}x=-3+t\\ y=2-t\end{cases}$

+ Phương trình chính tắc : $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-2}{-1}$

+ Phương trình tổng quát : $x+y+1=0$.

Bài 3. Viết phương trình đường thẳng đi qua M(1 ; 2) và thoả mãn điều kiện:

a) Cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB ;

b) Chắn trên các trục Ox, Oy các đoạn thẳng bằng nhau.

Giải.

Giả sử A(a ; 0), B(0 ; b) với a.b ≠ 0.

Khi đó phương trình đường thẳng có dạng $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

a) Vì M là trung điểm AB nên ta có:

$$\begin{cases}x_A+x_B=2x_M\\ y_A+y_B=2y_M\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+0=2\\ 0+b=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ b=4.\end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng là $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}=1$ hay $2x+y-4=0$.

b) Vì đường thẳng qua M(1 ; 2) nên $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=1$ (1).

Ta có : $OA=OB \Leftrightarrow |a|=|b| \Leftrightarrow a=\pm b$.

* $a=b$: Khi đó (1) trở thành $\dfrac{1}{b}+\dfrac{2}{b}=1 \Leftrightarrow b=3$, suy ra $a=3$.

Ta có phương trình đường thẳng là $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{3}=1 \Leftrightarrow x+y-3=0$.

* $a=-b$: Khi đó (1) trở thành $\dfrac{1}{-b}+\dfrac{2}{b}=1 \Leftrightarrow b=1$, suy ra $a=-1$.

Ta có phương trình đường thẳng là $\dfrac{x}{-1}+\dfrac{y}{1}=1 \Leftrightarrow x-y+1=0$

Bài 4. Cho M(−1 ; 2). Viết phương trình đường thẳng Δ qua M và tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4.

Giải.

Giả sử Δ đi qua A(a ; 0), B(0 ; b). Khi đó phương trình đường thẳng Δ có dạng $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

Ta có $S_{\Delta OAB}=\dfrac{OA.OB}{2}=4$, suy ra $|ab|=8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}ab=8 & (1)\\ ab=-8 & (2)\end{array}\right.$

Ta có Δ qua M(−1 ; 2) nên $\dfrac{-1}{a}+\dfrac{2}{b}=1$ hay $2a-b=ab$. (3)

Giải (1) và (3), ta được $a=2+2\sqrt{2}$ hoặc $a=2-2\sqrt{2}$.

– Với $a=2+2\sqrt{2}$, ta có $b=-4+4\sqrt{2}$.

Vậy phương trình của Δ là $\frac{x}{2+2\sqrt{2}}+\frac{y}{-4+4\sqrt{2}}=1$.

– Với $a=2-2\sqrt{2}$, ta có: $b=-4-4\sqrt{2}$.

Vậy phương trình của Δ là $\frac{x}{2-2\sqrt{2}}+\frac{y}{-4-4\sqrt{2}}=1$.

Giải (2) và (3), ta được $a=-2$, suy ra $b=4$.

Vậy phương trình của Δ là $\frac{x}{-2}+\frac{y}{4}=1$ hay $2x-y+4=0$.

Bài 5. Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC biết trung điểm cạnh BC là M(1;4), trung điểm cạnh CA là N(−1;3) và trực tâm $H\left(\frac{1}{3};-\frac{5}{3}\right)$.

Giải

Ta có vectơ pháp tuyến của đường thẳng CH là $\overrightarrow{MN}=(-2;-1)$

Phương trình đường cao CH là

$$-2\left(x-\frac{1}{3}\right)-1.\left(y+\frac{5}{3}\right)=0\Leftrightarrow -2x-y-1=0\Leftrightarrow y=-2x-1$$

Đỉnh C nằm trên CH nên C(a ; −2a −1).

Khi đó do M là trung điểm BC nên

$$\begin{cases}x_B=2x_M-x_C=2-a\\ y_B=2y_M-y_C=9+2a\end{cases}\Rightarrow B(2-a;9+2a)$$

Từ đó: $\overrightarrow{BH}=\left(-\frac{5}{3}+a;-\frac{32}{3}-2a\right),\overrightarrow{CN}=(-1-a;4+2a)$

Do BH ⊥ CN nên

$$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CN}=0\Leftrightarrow\left(-\frac{5}{3}+a\right)(-1-a)+\left(\frac{32}{3}-2a\right)(4+2a)=0$$

$$\Leftrightarrow 15a^2+86a+123=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-3\\ a=-\frac{41}{15}\end{array}\right.$$

- Với $a=-3$ thì C(−3 ; 5), B(5;3)

  Do N là trung điểm CA nên dễ có A(1;1).

  Suy ra phương trình các cạnh của tam giác ABC là:

  AB : $x-2y+1=0$; BC: $x+4y-17=0$; CA: $x+y-2=0$.

- Với $a=-\frac{41}{15}$ ta có $A\left(\frac{11}{15};\frac{23}{15}\right),B\left(\frac{71}{15};\frac{53}{15}\right),C\left(-\frac{41}{15};\frac{76}{15}\right)$

  và từ đó tìm được phương trình các cạnh của tam giác ABC

Dạng 2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

- ***Sử dụng các kết quả về việc xét vị trí tương đối của hai đường thẳng.***
- ***Trong trường hợp có tham số ta nên sử dụng định thức.***

Bài 6. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây :

a) $3x-2y+5=0$ và $-2x+7y-1=0$;

b) $-4x+2y+\sqrt{2}=0$ và $2\sqrt{2}x-\sqrt{2}y-\sqrt{3}=0$;

c) $6x+3y-1=0$ và $-2\sqrt{3}x-\sqrt{3}y+\frac{1}{\sqrt{3}}=0$.

Giải.

a) Ta có $\frac{3}{-2}\neq\frac{-2}{7}\Rightarrow$ hai đường thẳng cắt nhau.

b) Ta có $\frac{-4}{2\sqrt{2}}=\frac{2}{-\sqrt{2}}\neq\frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{3}}\Rightarrow$ hai đường thẳng song song.

c) Ta có $\frac{6}{-2\sqrt{3}}=\frac{3}{-\sqrt{3}}=\frac{-1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\Rightarrow$ hai đường thẳng trùng nhau.

Bài 7. Biện luận theo m vị trí tương đối của hai đường thẳng sau

$d_1: x+my-3m=0$ và $d_2: mx+y-2m-1=0$.

Giải

Ta tính các định thức như sau :

$$D=\begin{vmatrix}1 & m\\ m & 1\end{vmatrix}=1-m^2,\ D_x=\begin{vmatrix}m & -3m\\ 1 & -2m-1\end{vmatrix}=-2m^2+2m\ ;$$

$$D_y=\begin{vmatrix}-3m & 1\\ -2m-1 & m\end{vmatrix}=-3m^2+2m+1.$$

Xảy ra các trường hợp sau:

- $D=1-m^2\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 1\\ m\neq -1\end{cases}$: Khi đó d_1 cắt d_2.
- $m=1\Rightarrow D=D_x=D_y=0$: Khi đó d_1 và d_2 trùng nhau.
- $m=-1\Rightarrow D=0$ và $D_x\neq 0$: Khi đó d_1 và d_2 song song.

Bài 8. Cho tam giác ABC có trực tâm H. Biết phương trình các đường thẳng AC, AH, CH là AC : $2x-y+3=0$; AH : $x-2y+3=0$; CH : $3x+2y-6=0$. Viết phương trình tổng quát của đường cao kẻ từ đỉnh B và tìm tọa độ đỉnh B.

Giải

Tọa độ H là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x-2y+3=0 \\ 3x+2y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{4} \\ y=\dfrac{15}{8} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{3}{4};\frac{15}{8}\right).$$

Đường cao BH qua H và vuông góc AC nên có phương trình :

$$x-\frac{3}{4}+2\left(y-\frac{15}{8}\right)=0 \text{ hay } 2x+4y-9=0.$$

Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-2y+3=0 \\ 2x-y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1. \end{cases}$

Vậy A(–1 ; 1).

Đường AB qua A(–1 ; 1) và vuông góc CH nên có phương trình:

$$2(x+1)-3(y-1)=0 \text{ hay } 2x-3y+5=0.$$

Tọa độ B là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+4y-9=0 \\ 2x-3y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=2. \end{cases}$

Vậy $B\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Bài 9. Cho hai đường thẳng d và d′ có phương trình sau:

d : $mx+y-4=0$, d′: $x+my-3m-1=0$.

a) Xác định m để d và d′ cắt nhau.

b) Xác định m để giao điểm của d và d′ có tọa độ là các số nguyên.

c) Trong trường hợp d và d′ cắt nhau tại I, chứng minh rằng khi m thay đổi điểm I luôn luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Giải

Ta có: $D=m^2-1=(m-1)(m+1)$; $D_x=m-1$;

$D_y=3m^2+m-4=(m-1)(3m+4)$.

a) d và d′ cắt nhau $\Leftrightarrow D\neq 0 \Leftrightarrow (m-1)(m+1)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ m\neq -1. \end{cases}$

b) Với $m\neq 1$ và $m\neq -1$ thì giao điểm của d và d′ có tọa độ là

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{m-1}{(m-1)(m+1)}=\frac{1}{m+1} \text{ và } y=\frac{D_y}{D}=\frac{3m+4}{m+1}=3+\frac{1}{m+1}.$$

Ta có : x, y nguyên $\Leftrightarrow m+1=\pm 1 \Leftrightarrow m=0$ hoặc $m=-2$.

c) Với $m\neq \pm 1$ thì d và d′ cắt nhau tại điểm I(x; y), trong đó

$$x=\frac{1}{m+1},\ y=3+\frac{1}{m+1}.$$

Từ đó ta có $y=3+x$ hay $x-y+3=0$.

Vậy trong trường hợp d và d′ cắt nhau tại I, khi m thay đổi điểm I luôn luô nằm trên một đường thẳng cố định $x-y+3=0$.

Bài 10. Cho hai đường thẳng

$d_1 : (m+1)x-y+2m=0$ và $d_2 : x+(m+1)y-3m-2=0$.

a) Chứng minh rằng khi m thay đổi, d_1 và d_2 luôn đi qua hai điểm cố định A B tương ứng.

b) Chứng minh rằng khi m thay đổi, d_1 và d_2 luôn cắt nhau tại một điểm M nằm trên một đường cố định.

Giải.

a) Xét đường thẳng d_1: $(m+1)x-y+2=0$.

Gọi A(x ; y) là điểm cố định của d_1. Khi đó

$$(m+1)x-y+2m=0,\forall m \Leftrightarrow (x+2)m+x-y=0,\forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0+2=0 \\ x_0-y_0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-2 \\ y_0=-2. \end{cases}$$

Vậy d_1 đi qua điểm A(−2;−2) khi m thay đổi.

Tương tự, d_2 đi qua điểm cố định B(−1; 3).

b) Vectơ pháp tuyến của d_1, d_2 lần lượt là $\overrightarrow{n_1}=(m+1;-1), \overrightarrow{n_2}=(1;m+1)$

Ta có : $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=(m+1).1+(-1).(m+1)=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$

Vậy d_1 luôn vuông góc với d_2. Do đó khi m thay đổi, d_1 và d_2 luôn cắt nhau tại một điểm M.

Vì d_1 qua A, M và d_2 đi qua B, M nên AM ⊥ BM. Suy ra M luôn nằm trên đường tròn đường kính AB cố định.

Chú ý. Muốn giải bài toán tìm điểm cố định của một đường có phương trình f(x ; y m) = 0 (*), ta thực hiện

- *Biến đổi phương trình (*) về dạng* $A(x;y).m+B(x;y)=0,\ \forall m$.
- *Giải hệ* $\begin{cases} A(x;y)=0 \\ B(x;y)=0 \end{cases}$
- *Hệ có bao nhiêu nghiệm thì có bấy nhiêu điểm cố định.*

Dạng 3. Viết phương trình đường thẳng thoả mãn điều kiện cho trước

- *Chọn dạng thích hợp của đường thẳng (xem bảng sau).*
- *Sử dụng điều kiện cho trước để tìm ràng buộc giữa các đại lượng chưa biết.*

Đặc điểm của đường thẳng	*Dạng của phương trình đường thẳng*
Đi qua điểm $M(x_0;y_0)$	$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0, a^2+b^2>0$
Có hệ số góc k	$y=kx+m$
Cắt hai trục toạ độ tại $A(a;0), B(0;b)$, với $ab\neq 0$	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
Song song với đường thẳng $Ax+By+C=0$	$Ax+By+C'=0$ với $C'\neq C$
Vuông góc với đường thẳng $Ax+By+C=0$	$Bx-Ay+C'=0$

Bài 11. Cho đường thẳng $\Delta: 3x-y+1=0$.

a) Viết phương trình đường thẳng d_1 qua A(2; 3) và song song với đường thẳng Δ.

b) Viết phương trình đường thẳng d_2 qua B(−3; 4) và vuông góc với đường thẳng Δ.

Giải.

a) Vì d_1 song song với Δ nên phương trình d_1 có dạng

$$3x-y+C=0 \quad \text{với } C\neq 1.$$

Do d_1 đi qua A(2; 3) nên $3.2-3+C=0 \Rightarrow C=-3$ (thoả $C\neq 1$).

Vậy phương trình d_1 là $3x-y-3=0$.

b) Do d_1 vuông góc với Δ nên phương trình d_1 có dạng: $x+3y+C=0$.

Lại do d_2 qua B(−3; 4) nên $-3+3.4+C=0 \Rightarrow C=-9$.

Vậy phương trình d_2 là $x+3y-9=0$.

Bài 12. Viết phương trình đường thẳng qua $M(3;-2)$, cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho OA = 3OB.

Giải.

Phương trình đường thẳng theo đoạn chắn là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ với $ab\neq 0$

Vì đường thẳng qua điểm $M(3;-2)$ nên $\frac{3}{a}-\frac{2}{b}=1$. (*)

Mặt khác do OA = 3OB nên $|a|=3|b| \Rightarrow a=3b$ hoặc $a=-3b$.

- $a=3b$: (*) trở thành $\frac{3}{3b}-\frac{2}{b}=1 \Leftrightarrow -\frac{1}{b}=1 \Leftrightarrow b=-1$. Suy ra $a=-3$.

  Phương trình đường thẳng là $\frac{x}{-3}+\frac{y}{-1}=1 \Leftrightarrow x+3y+3=0$.

- $a=-3b$: (*) trở thành $\frac{3}{-3b}-\frac{2}{b}=1 \Leftrightarrow -\frac{3}{b}=1 \Leftrightarrow b=-3$. Suy ra $a=9$.

  Phương trình đường thẳng là $\frac{x}{9}+\frac{y}{-3}=1 \Leftrightarrow x-3y-9=0$.

Bài 13. Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x=1-t \\ y=3+2t \end{cases}$

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A(0; 2), cắt trục hoành tại B, cắt d tại C sao cho AB = 2AC.

Giải.

Cho C(1 −t ; 3 + 2t) thuộc d và B(b; 0) thuộc trục hoành.

Khi đó $\overrightarrow{AC}=(1-t;1+2t)$, $\overrightarrow{AB}=(b;-2)$

Có hai trường hợp

- $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$. Ta có $\begin{cases} b=2-2t \\ -2=2+4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ b=4 \end{cases}$

  Δ qua A(0 ; 2) và B(4 ; 0) nên Δ có phương trình $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1 \Leftrightarrow x+2y-4=0$

- $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AC}$. Tương tự như trên, ta có $\begin{cases} b=-2+2t \\ -2=-2-4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ b=-2 \end{cases}$

Suy ra phương trình Δ là $x-y+2=0$.

Dạng 4. Bài toán về hình chiếu của điểm M lên đường thẳng d và tìm điểm đối xứng của M qua một điểm, qua một đường thẳng.

- ***Hai điểm A, B được gọi là đối xứng qua điểm I ($A,B\neq I$) nếu như I là trung điểm đoạn AB.***
- ***Hai điểm A, B được gọi là đối xứng qua đường thẳng d ($A,B\notin d$) nếu như d là trung trực đoạn AB.***

Bài 14. Cho đường thẳng $d: x-2y+2=0$ và điểm M(1 ; 4).

a) Tìm tọa độ hình chiếu H của M lên d.

b) Tìm tọa độ điểm N đối xứng của M qua d.

Giải.

a) Viết phương trình d′ qua M và $d'\perp d$.

Vì $d'\perp d$ nên phương trình d′ có dạng $2x+y+c=0$.

Vì $M \in d'$ nên ta có : $2.1 + 4 + c = 0 \Rightarrow c = -6$.

Suy ra phương trình đường thẳng d' là $2x + y - 6 = 0$.

Gọi H là giao điểm của d' và d. Khi đó tọa độ của H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ 2x + y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Vậy H (2 ; 2).

b) N đối xứng với M qua d ⇔ H là trung điểm của MN, do đó :

$$\begin{cases} x_M + x_N = 2x_H \\ y_M + y_N = 2y_H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_N = 2x_H - x_M = 3 \\ y_N = 2y_H - y_M = 0 \end{cases}.$$

Vậy N(3 ; 0).

Bài 15. Cho ba đường thẳng $d_1: 3x - y - 4 = 0$, $d_2: x + y - 6 = 0$, $d_3: x - 3 = 0$

Tìm tọa độ của các đỉnh của hình vuông ABCD biết A, C thuộc d_3, B thuộc d_1, D thuộc d_2.

Giải.

Ta có B(b; 3b – 4), D(d; 6–d). Do AC // Oy và ABCD là hình vuông nên B và D đối xứng nhau qua AC. Do đó

$$\begin{cases} b + d = 6 \\ 3b - 4 = 6 - d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ d = 4. \end{cases}$$

Do đó B(2 ; 2), D(4 ; 2). Từ đó, trung điểm I của BD là tâm hình vuông, ta có I(3 ; 2).

Do A thuộc d_3 nên A(3 ; a).

Ta có $IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow (a-2)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 3 \end{array}\right.$

Vậy ta có hai đáp số : $A(3;3)$, $B(2;2)$, $C(1;3)$, $D(4;2)$;

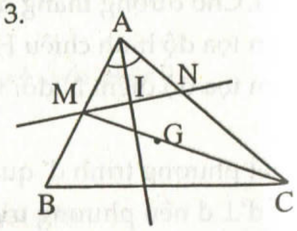
hoặc $A(1;3)$, $B(2;2)$, $C(3;3)$, $D(4;2)$.

Bài 16. Cho tam giác ABC có C(2; 3), trọng tâm $G\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$, phương trình đường phân giác trong của góc A là d: $2x + 5y + 7 = 0$. Hãy xác định toạ độ các đỉnh A, B.

Giải.

Gọi M là trung điểm AB.

Ta có $\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \Rightarrow$ M chia đoạn CG theo tỉ số k = 3.



Do đó $$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_C - 3x_G}{1-3} = \dfrac{2 - 3.\frac{2}{3}}{-2} = 0 \\ y_M = \dfrac{y_C - 3y_G}{1-3} = \dfrac{3 - 3.\frac{1}{3}}{-2} = -1 \end{cases} \Rightarrow M(0;-1)$$

Cho N(x; y) là điểm đối xứng của M qua đường phân giác trong d của góc A. Khi đó $MN \perp d$ nên

+ $\overrightarrow{MN} = (x; y+1)$ vuông góc với vectơ chỉ phương $\vec{u} = (5; -2)$ của d.

+ Trung điểm I của MN nằm trên d, ta có $I\left(\frac{x}{2}; \frac{y-1}{2}\right)$.

Từ đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 5x - 2(y-1) = 0 \\ 2.\dfrac{x}{2} + 5\left(\dfrac{y-1}{2}\right) + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ 2x + 5y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{8}{29} \\ y = -\dfrac{49}{29} \end{cases} \Rightarrow N\left(-\frac{8}{29}; -\frac{49}{29}\right)$$

Ta có $\overrightarrow{CN} = \left(-\frac{66}{29}; -\frac{136}{29}\right)$. Như thế đường thẳng CN qua C và có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (33; 68)$ nên có phương trình là

$$\frac{x-2}{33} = \frac{y-3}{68} \Leftrightarrow 68x - 33y - 37 = 0$$

Ta có $A = d \cap AN$ nên toạ độ của A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + 5y + 7 = 0 \\ 68x - 33y - 37 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{17} \\ y = \dfrac{139}{51} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{2}{17}; \frac{139}{51}\right)$$

Cuối cùng M là trung điểm AB nên $\begin{cases} x_B = 2x_M - x_A = -\dfrac{2}{17} \\ y_B = 2y_M - y_A = \dfrac{241}{51} \end{cases}$

Vậy $B\left(-\frac{2}{17}; \frac{241}{51}\right)$.

C. LUYỆN TẬP

- **Phương trình đường thẳng**

3.1. Cho đường thẳng Δ: $Ax + By + C = 0$. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

a) Vectơ pháp tuyến của Δ là $\vec{n} = (A; B)$.

b) Vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (B; A)$.

c) Nếu A = 0 thì Δ song song với trục hoành.

d) Nếu B = 0 và C ≠ 0 thì Δ song song với trục tung.

Hướng dẫn giải

a) và d) đúng ; b) và c) sai.

3.2. Cho đường thẳng d có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ và vectơ chỉ phương $\vec{u}$. Hãy điền vào bảng sau

Phương trình d	$\vec{n}$	$\vec{u}$	Giao điểm d với trục hoành	Giao điểm d với trục tung
$3x-4y+7=0$				
$2x-3=0$				
$-\sqrt{2}y+2=0$				
$\begin{cases}x=2+3t\\y=-1+t\end{cases}$				
$\begin{cases}x=-1\\y=3+t\sqrt{5}\end{cases}$				
$\begin{cases}x=3+4t\\y=0\end{cases}$				

Hướng dẫn giải

Phương trình d	$\vec{n}$	$\vec{u}$	Giao điểm d với trục hoành	Giao điểm d với trục tung
$3x-4y+7=0$	$\vec{n}=(3;-4)$.	$\vec{u}=(4;3)$.	$\left(-\frac{7}{3};0\right)$	$\left(0;\frac{7}{4}\right)$
$2x-3=0$	$\vec{n}=(2;0)$.	$\vec{u}=(0;2)$.	$\left(\frac{3}{2};0\right)$	Không có
$-\sqrt{2}y+2=0$	$\vec{n}=(0;\sqrt{2})$.	$\vec{u}=(\sqrt{2};0)$.	Không có	$(0;\sqrt{2})$
$\begin{cases}x=2+3t\\y=-1+t\end{cases}$	$\vec{n}=(1;-3)$.	$\vec{u}=(3;1)$.	(5;0)	$\left(0;-\frac{5}{3}\right)$
$\begin{cases}x=-1\\y=3+t\sqrt{5}\end{cases}$	$\vec{n}=(\sqrt{5};0)$.	$\vec{u}=(0;\sqrt{5})$.	(-1;0)	Không có
$\begin{cases}x=3+4t\\y=0\end{cases}$	$\vec{n}=(0;4)$.	$\vec{u}=(4;0)$.	Không có	(0;0)

3.3. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

a) Nếu $\vec{u}=(1;-\sqrt{5})$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d thì $\vec{u}'=(-\sqrt{5};5)$ cũng là vectơ chỉ phương của d.

b) Các vectơ $\vec{u}=\left(1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\vec{n}=\left(-1;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ lần lượt là vectơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến của một đường thẳng.

c) Hai đường thẳng có cùng vectơ pháp tuyến thì song song với nhau.

Hướng dẫn giải

a) Đúng vì hai vectơ chỉ phương của cùng một đường thẳng thì cùng phương.

b) Sai vì các vectơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến của cùng một đường thẳng phải vuông góc với nhau. Mà $\vec{u}.\vec{n}=\left(1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\vec{n}=\left(-1;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}\neq 0$

c) Sai. Hai đường thẳng có cùng vectơ pháp tuyến thì có thể song song với nhau hoặc trùng nhau.

3.4. Cho hai đường thẳng d và d′. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng , khẳng định nào sai ?

a) Nếu d và d′ có cùng vectơ chỉ phương thì d và d′ trùng nhau.

b) Nếu vectơ chỉ phương của d là vectơ pháp tuyến của d′ thì d vuông góc với d′.

c) Nếu vectơ chỉ phương của d cùng phương với vectơ chỉ phương của d′ thì vectơ pháp tuyến của d cũng cùng phương với vectơ pháp tuyến của d′.

Hướng dẫn giải

a) Sai. Hai đường thẳng có cùng vectơ chỉ phương thì có thể song song hoặc trùng nhau.

b) Đúng.

c) Đúng.

3.5. Viết phương trình tham số, phương trình chính tắc khi biết phương trình tổng quát:

a) $3x-y=6$ b) $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}=1$ c) $x=3$ d) $y=-1$

Hướng dẫn giải

a) $\begin{cases}x=t\\y=-6+3t\end{cases}$, $x=\frac{y+6}{3}$ b) $\begin{cases}x=2-t\\y=t\end{cases}$, $\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{1}$

c) $\begin{cases}x=3\\y=t\end{cases}$, (không có phương trình chính tắc)

d) $\begin{cases}x=t\\y=-1\end{cases}$

3.6. Viết phương trình tổng quát khi biết phương trình chính tắc hoặc phương trình tham số :

a) $\begin{cases}x=2-t\\y=-1+3t\end{cases}$ b) $\begin{cases}x=2\\y=4+t\end{cases}$ c) $\begin{cases}x=2t\\y=-1\end{cases}$ d) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-1}$

Hướng dẫn giải

a) $3x+y-5=0$ b) $x-2=0$

c) $y+1=0$ d) $x+2y-1=0$

3.7. Tìm điều kiện của tham số m để các phương trình sau là phương trình của đường thẳng trong mặt phẳng:

a) $(m-1)x+(m^2-3m+2)y+2=0$ b) $(3m-1)x+my-2=0$

c) $x+(m-2)y=0$ d) $\frac{mx}{m-1}+\frac{m^2y}{m+1}=1$

Hướng dẫn giải

Phương trình ax + by + c = 0 là phương trình của đường thẳng trong mặt phẳng khi a và b không đồng thời bằng 0. Nghĩa là $a^2+b^2>0$.

Từ đó ta có các kết quả sau:

a) $m\neq 1$ b) $m\in\mathbb{R}$ c) $m\in\mathbb{R}$ d) $m\notin\{-1;1;0\}$

3.8. Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases}x=4-3t\\ y=1+t\end{cases}$

a) Viết phương trình đường thẳng d_1 qua M(1 ; 1) và song song với d.

b) Viết phương trình đường thẳng d_2 qua M(1 ; 1) và vuông góc với d.

Hướng dẫn giải

a) $\begin{cases}x=1-3t\\ y=1+t\end{cases}$ b) $\begin{cases}x=1+t\\ y=1+3t\end{cases}$

3.9. Viết phương trình tổng quát, tham số, chính tắc của đường thẳng trong các trường hợp sau đây :

a) Qua hai điểm M(–3 ; 1) và N(0 ; 3)

b) Qua M(–2; 4) và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;1)$

c) Qua M(–2; 4) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-3)$

d) Cắt trục tung tại điểm có tung độ là 4 và qua giao điểm của đường thẳng 2x –3y + 6 = 0 với trục hoành.

Hướng dẫn giải

a) $\begin{cases}x=-3+3t\\ y=1+2t\end{cases}$ $\frac{x+3}{3}=\frac{y-1}{2}$, $2x-3y+9=0$

b) $\begin{cases}x=-2+3t\\ y=4+t\end{cases}$, $\frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{1}$, $x-3y+14=0$

c) $\begin{cases}x=-2+3t\\ y=4+2t\end{cases}$, $\frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{2}$, $2x-3y+16=0$

d) $\begin{cases}x=-3t\\ y=4-4t\end{cases}$, $\frac{x}{-3}=\frac{y-4}{-4}$, $-4x+3y-12=0$

3.10. Cho đường thẳng Δ có phương trình 3x – 5y – 11 = 0. Hãy lập phương trình đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau đây:

a) Đi qua M(2; –3) và song song với Δ;

b) Đi qua M(2; –3) và vuông góc với Δ;

c) Đi qua M(2; –3) và cắt trục hoành tại A, cắt trục tung tại B sao cho OB = 2OA (A, B khác gốc toạ độ O).

Hướng dẫn giải

a) * d song song với Δ nên d có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;-5)$.

Vậy phương trình của d là

$3(x-2)-5(y+3)=0\Leftrightarrow 3x-5y-21=0$ (dễ thấy $d\not\equiv\Delta$ nên $d\,//\,\Delta$).

* *Cách khác* : d song song với Δ : 3x – 5y – 11 = 0 nên phương trình d có dạng $3x-5y+c=0$ (với $c\neq-11$).

Vì d qua M(2 ; –3) nên $3.2-5.(-3)+c=0\Leftrightarrow c=-21$ (thoả $c\neq-11$).

Vậy phương trình d là $3x-5y-21=0$.

b) Vì d vuông góc với Δ nên d nhận vectơ chỉ phương $\vec{u}=(5;3)$ của Δ làm vectơ pháp tuyến. Vậy phương trình của d là

$5(x-2)+3(y+3)=0\Leftrightarrow 5x+3y-1=0$.

c) Giả sử A(a ; 0), B(0 ; b). Khi đó phương trình theo đoạn chắn của đường thẳng d có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ (ab\neq0)$.

Vì d qua M(2 ; –3) nên $\frac{2}{a}-\frac{3}{b}=1$ (*)

Theo giả thiết OB = 2OA nên $|b|=2|a|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=2a\\ b=-2a\end{array}\right.$

- b = 2a : Từ hệ thức (*), ta có $\frac{2}{a}-\frac{3}{2a}=1\Leftrightarrow\frac{1}{2a}=1\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$

  Ta có phương trình đường thẳng d là $2x+y-1=0$.

- b = –2a : Từ (*), ta có $\frac{2}{a}-\frac{3}{-2a}=1\Leftrightarrow\frac{7}{2a}=1\Leftrightarrow a=\frac{7}{2}$

  Ta có phương trình đường thẳng d là $2x-y-7=0$.

- **Vị trí tương đối của hai đường thẳng**

3.11. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai ?

a) Nếu hai đường thẳng cắt nhau thì các vectơ pháp tuyến của chúng không cùng phương.

b) Hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi hệ số góc của chúng bằng nhau.

c) Nếu hai đường thẳng vuông góc với nhau thì vectơ chỉ phương của đường thẳng này cũng là vectơ chỉ phương của đường thẳng kia.

d) Hai đường thẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi tích hệ số góc của chúng bằng −1.

e) Nếu hai đường thẳng có cùng vectơ chỉ phương thì chúng song song hoặc trùng nhau.

Hướng dẫn giải

a) d) và e) đúng ;   b) và c) sai .

3.12. Khẳng định nào sau đây **sai** ?

a) d: $2x + y - 1 = 0$ song song với d′ : $-\frac{1}{2}x - y + \frac{1}{3} = 0$

b) d: $-\sqrt{3}x + 3y = 6$ cắt d′ : $x - \sqrt{3}y - 2\sqrt{3} = 0$

c) d: $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y - 1 = 0$ trùng với d′ : $-\frac{2}{\sqrt{3}}x + \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} = 0$

d) d: $-2\sqrt{3}x + y - 1 = 0$ vuông góc với d′ : $6y - \sqrt{3}x = 1$

Hướng dẫn giải

Các khẳng định a), b), c) sai .

3.13. Chứng minh rằng các cặp đường thẳng sau đây cắt nhau và tìm toạ độ giao điểm của chúng.

a) $2x + y - 4 = 0$ và $4x - 11y - 7 = 0$

b) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + 4t \end{cases}$ và $3x + 5y - 11 = 0$

c) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 + 5t \end{cases}$ và $-4x + 6y - 3 = 0$

d) $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1}$ và $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{3}$

e) $\frac{x+4}{1} = \frac{y}{-2}$ và $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) $\left(\frac{51}{26}; \frac{1}{13}\right)$ b) $\left(\frac{36}{13}; \frac{7}{13}\right)$ c) $\left(3; \frac{5}{2}\right)$ d) $\left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{4}\right)$ e) $(-22; 36)$.

3.14. Xác định các giá trị m sao cho các cặp đường thẳng sau đây song song với nhau.

a) $2x + my + 4 = 0$ và $-x + y - 1 = 0$;

b) $(m + 1)x + y + 4 = 0$ và $2x + 3y - 1 = 0$;

c) $3x + my - 3 = 0$ và $(m + 1)x + 2y - 1 = 0$;

d) $x + 3 = 0$ và $mx + (m + 1)y = -1$;

e) $2y + 4 = 0$ và $-m(m + 1)x + my + 2 = 0$;

g) $2x + my + 3 = 0$ và $mx + 6y + 3\sqrt{3} = 0$.

Hướng dẫn giải

a) $m = -2$ b) $m = -\frac{1}{3}$ c) $m \in \{-3; 2\}$

d) $m = -1$ e) $m = -1$ g) $m = -2\sqrt{3}$

3.15. Biện luận theo m vị trí tương đối của các cặp đường thẳng:

a) $mx + 4y - m = 0$ và $x + my - m + 1 = 0$;

b) $2x + (m-1)y - 4 = 0$ và $mx + 3y - m - 3 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) $m = 2$: trùng nhau ; $m = -2$: song song;

$m \neq 2$ và $m \neq -2$: cắt nhau.

b) $m = 3$: trùng nhau ; $m = -2$: song song ;

$m \neq 3$ và $m \neq -2$: cắt nhau.

3.16. Trong bảng sau đây, hãy ghép các cặp đường thẳng vuông góc với nhau.

$2x - 3y + 5 = 0$	$x + \sqrt{2}y - 1 = 0$
$3x - 1 = 0$	$3x - y - 12 = 0$
$-\sqrt{2}x + 2y - 4 = 0$	$2x + 1 = 0$
$-4y + 3 = 0$	$9x + 6y - 11 = 0$
$\frac{x}{3} + \frac{y}{1} = 1$	$4 - \frac{5y}{3} = 0$

Hướng dẫn giải

Hai đường thẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi các vectơ pháp tuyến của chúng vuông góc với nhau. Các cặp đường thẳng vuông góc với nhau:

$2x - 3y + 5 = 0$ và $9x + 6y - 11 = 0$; $3x - 1 = 0$ và $4 - \frac{5y}{3} = 0$;

$-4y + 3 = 0$ và $2x + 1 = 0$; $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} = 1$ và $3x - y - 12 = 0$.

3.17. Cho hai đường thẳng $d_1: 2x+3y-5=0$ và $d_2: 3x+y-10=0$.

a) Chứng minh rằng hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau.

b) Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua giao điểm của d_1 và d_2 đều có phương trình có dạng *"a(2x + 3y – 5) + b(3x + y –10) = 0"* (*) với $a^2+b^2>0$. (Phương trình (*) được gọi là *phương trình của chùm đường thẳng* xác định bởi d_1 và d_2, I là điểm cố định của chùm).

c) Áp dụng: Viết phương trình của đường thẳng qua I và thoả mãn một trong hai điều kiện sau :

c_1) Đi qua M(2 ; 4) ;

c_2) Vuông góc với đường thẳng $3x+y-2=0$.

Hướng dẫn giải

a) $d_1: 2x+3y-5=0$ và $d_2: 3x+y-10=0$ cắt nhau vì $\frac{2}{3}\neq\frac{3}{1}$.

b) Gọi $I(x_0;\ y_0)$ là giao điểm của d_1 và d_2 khi đó $2x_0+3y_0-5=0$ và $3x_0+y_0-10=0$. Từ đó toạ độ I thoả mãn phương trình đường thẳng Δ :

$a(2x+3y-5)+b(3x+y-10)=0$ (1) $\Rightarrow$ Δ qua I.

Ngược lại, cho Δ′ là đường thẳng qua giao điểm I của d_1 và d_2, khi đó Δ′ có phương trình $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ (2)

Đồng nhất (1) và (2), ta tìm được $\begin{cases}2a+3b=A\\3a+b=B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=A-3B\\b=3A-8B\end{cases}$

Như đã chứng minh trên, Δ qua I như vậy mọi đường thẳng qua giao điểm của d_1 và d_2 đều có phương trình dạng (1).

c) Theo câu b) phương trình đường thẳng Δ qua giao điểm của $d_1: 2x+3y-5=0$ và $d_2: 3x+y-10=0$ có dạng : $a(2x+3y-5)+b(3x+y-10)=0$ với $a^2+b^2>0$.

c_1) Δ đi qua điểm M(2 ; 4) nên $11a=0\Rightarrow a=0$. Từ đó $b\neq0$ nên ta chọn b = 1. Vậy phương trình Δ là $3x+y-10=0$ $(\Delta\equiv d_2)$.

c_2) Δ vuông góc với đường thẳng $3x+y-2=0$: Ta có

$\Delta: (2a+3b)x+(3a+b)y-5a-10b=0\Rightarrow\overrightarrow{n_\Delta}=(2a+3b;3a+b)$ là vectơ pháp tuyến của Δ ; d_2 có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;1)$.

Từ đó $3(2a+3b)+1.(3a+b)=0\Leftrightarrow9a+10b=0$.

Chọn $a=-10,\ b=9$ ta có phương trình Δ là $7x-21y-40=0$.

3.18. Cho hai đường thẳng $d_1: mx-y+2m-1=0$ và $d_2: x+my+m-1=0$.

a) Chứng minh rằng khi m thay đổi thì mỗi đường thẳng (d_1) và (d_2) luôn đi qua một điểm cố định.

b) Chứng minh (d_1) và (d_2) luôn cắt nhau tại một điểm A nằm trên một đường cố định.

Hướng dẫn giải

a) Xét $d_1: mx-y+2m-1=0$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định của d_1. Khi đó

$mx_0-y_0+2m-1=0\ \forall m\Leftrightarrow m(x_0+2)-y_0-1=0\ \forall m$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0+2=0\\y_0-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=-2\\y_0=1\end{cases}$

Vậy d_1 qua điểm cố định $M(-2;1)$.

Tương tự, ta tìm được điểm cố định của d_2 là $N(1;-1)$.

b) Ta có vectơ pháp tuyến của d_1 là $\overrightarrow{n_1}=(m;-1)$ và vectơ pháp tuyến của d_2 là $\overrightarrow{n_2}=(1;m)$. Ta có $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0$ nên d_1 và d_2 luôn vuông góc và cắt nhau tại điểm A. Mặt khác $AM\perp AN$ nên A luôn nằm trên đường cố định là đường tròn đường kính MN.

3.19. Cho hai đường thẳng $d_1: x-3y-2=0$, $d_2: 4x-y+1=0$.

Viết phương trình đường thẳng qua M(1; 1) cắt d_1, d_2 lần lượt tại A, B sao cho M là trung điểm đoạn AB.

Hướng dẫn giải

Giả sử $A(a;b)\in(d_1)\Leftrightarrow a-3b-2=0\Leftrightarrow a=3b+2$. Vậy $A(3b+2;b)$.

Vì M là trung điểm đoạn AB nên

$\begin{cases}x_B=2x_M-x_A=2-3b-2=-3b\\y_B=2y_M-y_A=2-b\end{cases}$

Ta lại có: $B(-3b;2-b)\in d_2\Leftrightarrow4(-3b)-(2-b)+1=0\Leftrightarrow b=-\frac{1}{11}$

Từ đó có điểm $A\left(\frac{19}{11};\frac{-1}{11}\right)$.

Đường thẳng AB qua A, M nhận $\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{8}{11};\frac{12}{11}\right)$ hay $\vec{u}=(-2;3)$ làm vectơ chỉ phương. Phương trình đường thẳng AB là

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{3}\Leftrightarrow3x+2y-5=0.$$

3.20. Cho hai đường thẳng $d_1: 3x-y+5=0$ và $d_2: -2x+3y-1=0$.

a) Tìm tọa độ giao điểm của d_1 và d_2.

b) Viết phương trình đường thẳng Δ qua điểm A(2;–3), cắt d_1 và d_2 lần lượt tại B và C sao cho AB = BC.

Hướng dẫn giải

a) Tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}3x-y+5=0\\-2x+3y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}\Rightarrow I(-2;-1)$$

b) Do A, B, C thẳng hàng và AB = BC nên B là trung điểm AC.

Gọi D là trung điểm IA. Khi đó D(0; −2) và tam giác IAC nhận BD làm đường trung bình. Do đó BD // d_2.

Từ đó phương trình BD có dạng $-2x+3y+C=0$ ($C\neq-1$).

Vì BD qua D nên C = 6.

Vậy BD : $-2x+3y+6=0$.

B là giao điểm của BD và d_1 nên tọa độ của B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}3x-y+5=0\\-2x+3y+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\y=-4\end{cases}\Rightarrow B(-3;-4)$$

Đường thẳng Δ qua A nhận $\overrightarrow{AB}=(-5;-1)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình:

$$\frac{x-2}{-5}=\frac{y+3}{-1}\Leftrightarrow x-2=5y+15\Leftrightarrow x-5y-17=0.$$

- **Phương trình đường thẳng thoả điều kiện cho trước**

3.21. Cho tam giác ABC với B(−4 ; −3), hai đường cao có phương trình là

$$5x+3y+4=0 \text{ và } 3x+8y+13=0.$$

Lập phương trình các cạnh của tam giác.

Hướng dẫn giải

Dễ thấy B không nằm trên hai đường cao có phương trình đã cho. Do đó ta có thể xem phương trình đường cao qua A là $5x+3y+4=0$ và phương trình đường cao qua C là $3x+8y+13=0$.

+ Cạnh AB vuông góc với đường thẳng $3x+8y+13=0$ nên phương trình có dạng $8x-3y+C=0$.

Thay toạ độ của B vào, ta được $8(-4)-3(-3)+C=0\Leftrightarrow C=23$.

Do đó phương trình cạnh AB là $8x-3y+23=0$.

+ Tương tự như trên ta tìm được phương trình cạnh BC là $3x-5y-3=0$.

+ Toạ độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases}5x+3y+4=0\\8x-3y+23=0\end{cases}\Rightarrow A\left(-\frac{27}{13};\frac{83}{39}\right)$

+ Toạ độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases}3x+8y+13=0\\3x-5y-3=0\end{cases}\Rightarrow C\left(-\frac{41}{39};-\frac{16}{13}\right)$

Từ đó ta tìm được phương trình cạnh AC là $131x-40y+\frac{4617}{13}=0$.

3.22. Cho tam giác ABC có B(2; −7).

Phương trình đường cao qua A là $3x+y+11=0$, phương trình đường trung tuyến vẽ từ C là $x+2y+7=0$. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng BC qua B và vuông góc với AH nên có phương trình

$$1.(x-2)-3(y+7)=0 \text{ hay } x-3y-23=0.$$

Điểm A nằm trên đường thẳng AH nên A(a; −11 −3a). Khi đó trung điểm M của đoạn AB là $M\left(\frac{2+a}{2};\frac{-18-3a}{2}\right)$.

M nằm trên trung tuyến CM : $x+2y+7=0$ nên

$$\frac{2+a}{2}+2.\frac{-18-3a}{2}+7=0\Leftrightarrow 2+a-36-6a+14=0\Leftrightarrow a=-4$$

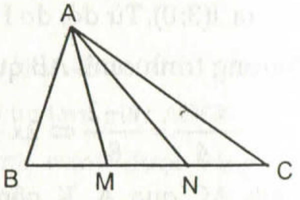
Từ đó A(−4; 1). Phương trình đường thẳng AB là $4x+3y+13=0$.

Tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases}x+2y+7=0\\x-3y-23=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=-6\end{cases}\Rightarrow C(5;-6)$.

Từ đó phương trình cạnh AC là $7x+9y+19=0$.

3.23. Cho ba điểm A(1; 1), B(1; 5), C(−2; 7). Viết phương trình hai đường thẳng qua A, cắt cạnh BC tại M, N và chia tam giác ABC thành ba tam giác có diện tích bằng nhau.

Hướng dẫn giải



Giả sử các điểm M, N trên cạnh BC thoả mãn yêu cầu bài toán.

Khi đó $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Ta có $\overrightarrow{BC}=(-3;2)$, $\overrightarrow{BM}=(x_M-1;y_M-5)$

Như thế $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M-1=\frac{1}{3}(-3)\\y_M-5=\frac{1}{3}.2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=0\\y_M=\frac{17}{3}\end{cases}$

Vậy $M\left(0;\frac{17}{3}\right)$. Tương tự, ta có $N\left(-1;\frac{19}{3}\right)$

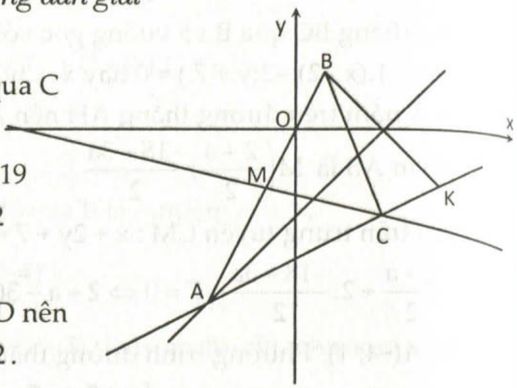
Đường thẳng qua A, M có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AM}=\left(-1;\frac{14}{3}\right)$ hay $\vec{u}=(-3;14)$.

Do đó phương trình của AM là $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-1}{14} \Leftrightarrow 14x+3y-17=0$

- Tương tự, phương trình của AN là $8x+3y-11=0$.

3.24. Cho tam giác ABC có $B(1\,;2)$. Đường phân giác trong góc A có phương trình $x-y-3=0$, đường trung tuyến qua C có phương trình $x+4y+9=0$. Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải



Gọi M là trung điểm AB.

Khi đó M nằm trên trung tuyến qua C nên $M(-4b-9;b)$.

Ta lại có $\begin{cases} x_A=2x_M-x_B=-8b-19 \\ y_A=2y_M-y_B=2b-2 \end{cases}$

$\Rightarrow A(-8b-19;2b-2)$

Vì A nằm trên phân giác trong AD nên

$-8b-19-(2b-2)-3=0 \Leftrightarrow b=-2$.

Do đó $M(-1;-2)$ và $A(-3;-6)$.

Gọi K là điểm đối xứng của B qua phân giác trong AD. Khi đó K thuộc AC.

Phương trình BK: $x+y-3=0$

Toạ độ giao điểm I của BK và phân giác trong AD là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-y-3=0 \\ x+y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$$

Suy ra $I(3;0)$. Từ đó, do I là trung điểm BK nên $K(5;-2)$.

Phương trình cạnh AB qua A, nhận $\overrightarrow{AB}=(4;8)$ làm vectơ chỉ phương là

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{8} \Leftrightarrow 2x-y=0$$

Cạnh AC qua A, K nên nhận $\overrightarrow{AK}=(8;4)$ làm vectơ chỉ phương. Do đó phương trình của AC là $\frac{x+3}{8}=\frac{y+6}{4} \Leftrightarrow x-2y-9=0$

Toạ độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-2y-9=0 \\ x+4y+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases} \Rightarrow C(3;-3)$

Cạnh BC nhận $\overrightarrow{BC}=(2;-5)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-5} \Leftrightarrow 5x+2y-9=0.$$

3.25. Cho tam giác ABC có trung điểm cạnh AB là M(1; 1), phương trình cạnh BC là 3x + 4y − 12 = 0, phương trình cạnh AC là x − y − 6 = 0. Viết phương trình cạnh AB.

Hướng dẫn giải

Giả sử $A(a;b)$. Vì A nằm trên cạnh AC nên $a-b-6=0 \Rightarrow b=a-6$.

Do đó $A(a;a-6)$. Vì M là trung điểm đoạn AB nên

$$\begin{cases} x_M=\frac{x_A+x_B}{2} \\ y_M=\frac{y_A+y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=2x_M-x_A=2-a \\ y_B=2y_M-y_A=8-a \end{cases} \Rightarrow B(2-a;8-a)$$

Vì B nằm trên đường thẳng BC nên $3x_B+4y_B-12=0$, hay

$3(2-a)+4(8-a)-12=0 \Leftrightarrow -7a=-26 \Leftrightarrow a=\frac{26}{7}$.

Suy ra $B\left(-\frac{12}{7};\frac{30}{7}\right)$. Từ đó $\overrightarrow{BM}=\left(\frac{19}{7};-\frac{23}{7}\right)$

Cạnh AB có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{BM}$ hay $\vec{u}=(19;-23)$. Phương trình cạnh AB là $\frac{x-1}{19}=\frac{y-1}{-23} \Leftrightarrow 23x+19y-42=0$.

3.26. Cho tam giác ABC. Biết D(2;−1), E(2;2), F(−2;2) lần lượt là chân các đường cao hạ từ A, B, C xuống các cạnh BC, CA, AB. Hãy tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Phương trình đường thẳng BC qua D có dạng

$a(x-2)+b(y+1)=0$ hay $ax+by-2a+b=0$ với $a^2+b^2>0$.

Ta có $\overrightarrow{DF}=(-4;3), \overrightarrow{DE}=(0;3)$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC.

Bằng kiến thức hình học phẳng, dễ dàng chứng minh được rằng HD là phân giác góc EDF của tam giác DEF. Từ đó suy ra

$$\widehat{FDB}=\widehat{EDC} \Rightarrow \cos\widehat{FDB}=\cos\widehat{EDC}$$

Ta có

$$\frac{|-4(a)+3b|}{\sqrt{16+9}.\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|0.a+3.b|}{\sqrt{0+9}.\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow 3|3b-4a|=15|b|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9b-12a=15b \\ 9b-12a=-15b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-2a \\ a=2b \end{array}\right.$$

$b=-2a$: Chọn $a=1$, $b=-2$ ta có phương trình đường thẳng BC là $x-2y-4=0$.

Đường thẳng AH đi qua D và vuông góc BC nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2;1)$. Do đó phương trình AH là

$$2(x-2) + 1.(y+1) = 0 \text{ hay } 2x + y - 3 = 0.$$

Vì A nằm trên AH nên $A(a; 3-2a)$, C nằm trên BC nên $C(2c+4; c)$

Ta có $\overrightarrow{AF} = (-2-a; 2a-1), \overrightarrow{CF} = (-2c-6; 2-c)$,

Vì $AF \perp CF$

nên $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{CF} = (-2-a)(-2c-6) + (2a-1)(2-c) = 0 \Leftrightarrow c = -2a-2$

Vậy $C(-4a; -2a-2)$.

Do đó $\overrightarrow{CA} = (5a; 5), \overrightarrow{CE} = (4a+2; 2a+4)$

Do các vectơ $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CE}$ là cùng phương nên:

$$5a(2a+4) - 5(4a+2) = 0 \Leftrightarrow 10a^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -1 \end{array}\right.$$

Từ đó ta có $A(-1; 5)\ C(4; 0)$, $B(-4; -4)$ hoặc $A(1; 1)$, $C(-4; -4)$, $B(4; 0)$.

- $a = 2b$. Chọn $b = 1$, $a = 2$ ta có phương trình BC là $2x + y - 3 = 0$.

Ta loại trường hợp này vì khi đó E và F nằm về hai phía BC.

3.27. Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC biết $A(1; 3)$ và phương trình hai đường trung tuyến là $x - 2y + 1 = 0$ và $y - 1 = 0$.

Hướng dẫn giải

Dễ thấy tọa độ A không thoả mãn phương trình của hai trung tuyến.

Từ đó ta có thể xem phương trình hai trung tuyến qua BM và CN là

$x - 2y + 1 = 0$ và $y - 1 = 0$.

Tọa độ B có dạng $B(2b-1; b)$. Khi đó do N là trung điểm AB nên $N\left(b; \frac{b+3}{2}\right)$

Lại do N nằm trên CN nên $\frac{b+3}{2} = 1 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow B(-3; -1)$

Từ đó ta có phương trình cạnh AB là $x - y + 2 = 0$.

Thực hiện tương tự ta tìm được $C(5; 1)$ và phương trình AC, BC lần lượt là AC: $x + 2y - 7 = 0$; BC : $x - 4y - 1 = 0$.

3.28. Cho tam giác ABC với $A(-2; 1)$, $B(2; 3)$, $C(1; -5)$.

a) Lập phương trình đường phân giác trong Δ của góc A của tam giác ABC.

b) Viết phương trình đường thẳng d qua B, cắt Δ và AC lần lượt tại M và N sao cho M là trung điểm BN.

Hướng dẫn giải

a) Gọi D là giao điểm của phân giác trong Δ với cạnh BC.

Theo tính chất đường phân giác, ta có:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow DB = \frac{2}{3}DC \Rightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$$

Giả sử $D(x; y)$. Khi đó $\overrightarrow{DB} = (2-x; 3-y), \overrightarrow{DC} = (1-x; -5-y)$

Vậy $\overrightarrow{DB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x = -\frac{2}{3}(1-x) \\ 3 - y = -\frac{2}{3}(-5-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 3x = -2 + 2x \\ 9 - 3y = 10 + 2y \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = -\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{8}{5}; -\frac{1}{5}\right)$$

Đường thẳng AD nhận $\overrightarrow{AD} = \left(\frac{18}{5}; -\frac{6}{5}\right) = \frac{6}{5}(3; -1)$ suy ra $\vec{u} = (3; -1)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng AD nên AD có phương trình

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-1} \Leftrightarrow -x - 2 = 3y - 3 \Leftrightarrow x + 3y - 1 = 0$$

b) Tam giác ABN có AM là phân giác và cũng là đường trung tuyến nên là tam giác cân tại A. Từ đó $BN \perp AM$ hay $\vec{u} = (3; -1)$ vuông góc với BN, do đó đường thẳng d có phương trình $3(x-2) - 1.(y-3) = 0 \Leftrightarrow 3x - y - 3 = 0$.

3.29. Viết phương trình đường thẳng cắt *tia Ox* tại A, cắt *tia Oy* tại B và thoả mãn:

a) Đi qua $A(1; 2)$ sao cho $OA = 2OB$.

b) Đi qua $N\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right)$ và $S_{\Delta OAB} = 2$.

c) Đi qua $M(2; 1)$ và $OA + OB$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Giả sử $A(a; 0)$, $B(0; b)$, ta có $a, b > 0$ (vì A, B thuộc các tia Ox, Oy).

Khi đó phương trình đường thẳng có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

a) Vì đường thẳng qua $A(1; 2)$ nên $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$ (*)

Ta có $OA = 2OB \Leftrightarrow a = 2b$.

+ Với $a = 2b$ ta có (*) trở thành $\frac{1}{2b} + \frac{2}{b} = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{2b} = 1 \Leftrightarrow b = \frac{5}{2}$

Từ đó $a = 5$ và phương trình đường thẳng là $\frac{x}{5} + \frac{2y}{5} = 1 \Leftrightarrow x + 2y - 5 = 0$

b) Vì đường thẳng qua $N\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}\right)$ nên $\frac{\sqrt{2}}{2a}+\frac{\sqrt{2}}{b}=1$

Ta có $S_{\Delta OAB}=2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}OA.OB=2 \Leftrightarrow ab=4 \Leftrightarrow b=\frac{4}{a}$

Từ đó $\frac{\sqrt{2}}{2a}+\frac{\sqrt{2}}{b}=1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2a}+\frac{a\sqrt{2}}{4}=1 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}+a^2\sqrt{2}-4a=0 \Leftrightarrow a=\sqrt{2}$

Khi đó $b=2\sqrt{2}$ và phương trình đường thẳng là:

$$\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{2\sqrt{2}}=1 \text{ hay } 2x+y-2\sqrt{2}=0$$

c) Vì đường thẳng qua $M(2;1)$ nên $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$

Ta có bằng cách sử dụng BĐT Cô-si

$$OA+OB=a+b=\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=3+\frac{a}{b}+\frac{2b}{a}\geq 3+2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{2b}{a}}=3+2\sqrt{2}$$

Vậy $\min(OA+OB)=3+2\sqrt{2}$ khi

$$\begin{cases}\frac{a}{b}=\frac{2b}{a}\\ \frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=b\sqrt{2}\\ \frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\sqrt{2}+2\\ b=\sqrt{2}+1\end{cases}$$

Phương trình đường thẳng thoả mãn ycbt là

$$\frac{x}{\sqrt{2}+2}+\frac{y}{\sqrt{2}+1}y=1 \Leftrightarrow x+\sqrt{2}y-\sqrt{2}-2=0$$

3.30*. Cho hai đường thẳng d: $x + 2y - 1 = 0$, d′: $3x + y - 7 = 0$ cắt nhau tại điểm I. Viết phương trình đường thẳng Δ qua điểm M(1; 2), đồng thời cắt d và d′ lần lượt tại A và B sao cho $AI=\sqrt{2}AB$.

Hướng dẫn giải

Tọa độ I là nghiệm của hệ $\begin{cases}x+2y-1=0\\ 3x+y-7=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-3\\ y=2\end{cases} \Rightarrow I(-3;2)$

Lấy C(1 ; 0) nằm trên d. Ta tìm D trên d′ sao cho $IC=\sqrt{2}CD$

Ta có D(a ; –7 – 3a). Từ đó

$$IC=\sqrt{2}CD \Leftrightarrow IC^2=2CD^2 \Leftrightarrow 20=2\left[(a-1)^2+(3a+7)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow 2a^2+8a+8=0 \Leftrightarrow a=-2$$

Suy ra D(–2; –1).

Ta có $\frac{IC}{CD}=\frac{IA}{AB}=\sqrt{2} \Rightarrow CD // AB$

Đường thẳng Δ qua M(1; 2) và nhận $\overrightarrow{CD}=(-3;-1)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình là $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{-1} \Leftrightarrow x-1=3y-6 \Leftrightarrow x-3y+5=0$.

3.31*. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M(3; 2), cắt tia Ox tại A, cắt tia Oy tại B (A, B khác gốc O) sao cho:

a) Diện tích tam giác OAB nhỏ nhất ;

b) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng Δ lớn nhất.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình đường thẳng Δ có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

Diện tích tam giác vuông OAB là $S=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}ab$

Do Δ qua M (3 ; 2) nên $\frac{3}{a}+\frac{2}{b}=1$ $(b>2$ vì $a>0)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô–si cho hai số dương $\frac{3}{a}$, $\frac{2}{b}$ ta được

$$1=\frac{3}{a}+\frac{2}{b}\geq 2\sqrt{\frac{3}{a}.\frac{2}{b}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\geq\sqrt{\frac{6}{ab}} \Leftrightarrow \frac{6}{ab}\leq\frac{1}{4} \Leftrightarrow ab\geq 24$$

Như vậy S đạt giá trị nhỏ nhất bằng 12 đạt được khi và chỉ khi

$$\frac{3}{a}=\frac{2}{b}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow a=6 \text{ và } b=4.$$

Vậy phương trình của Δ là : $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1 \Leftrightarrow 2x+3y-12=0$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O lên Δ.

Ta có OH ≤ OM nên maxOH = OM ⇔ H ≡ M hay Δ nhận vectơ OM làm vectơ pháp tuyến.

Vậy phương trình Δ là $3(x-3)+2(y-2)=0$ hay $3x+2y-13=0$.

3.32. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M(1; 2), cắt tia Ox tại A, cắt tia Oy tại B (A, B khác gốc O) sao cho:

a) OA + OB = 6 ; b) Tổng $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Giả sử Δ cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại A(a ; 0) , B(0 ; b) với $a, b>0$.

Khi đó phương trình của Δ là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Vì Δ qua M(1 ;2) nên $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$. (1)

a) Ta có $OA + OB = 6 \Leftrightarrow a + b = 6.$ (2)

Từ (1) và (2), ta tính được $a = 2,\ b = 4$ hoặc $a = b = 3$.

Như thế có hai đường thẳng thoả mãn yêu cầu bài toán là

$$2x + y - 4 = 0 \text{ và } x + y - 3 = 0.$$

b) Hạ OH vuông góc với AB. Khi đó $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$.

Như thế $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ OH lớn nhất.

Ta có $OH \le OM$, do đó OH lớn nhất là OM khi và chỉ khi $H \equiv M$ hay Δ nhận $\overrightarrow{OM} = (1;2)$ làm vectơ pháp tuyến.

Từ đó ta tìm được phương trình của Δ là $x + 2y - 5 = 0$.

3.33. Tìm M_1 đối xứng của M qua đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau

a) $d: 3x - 2y + 6 = 0$, $M(-2;1)$; b) $d: -5x + 6y - 11 = 0$, $M(3;6)$.

Hướng dẫn giải

a) Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên d. Khi đó phương trình của MH là

$$2(x + 2) + 3(y - 1) = 0 \text{ hay } 2x + 3y + 1 = 0.$$

Tọa độ H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x - 2y + 6 = 0 \\ 2x + 3y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{16}{13} \\ y = \frac{15}{13} \end{cases} \Rightarrow H\left(-\frac{16}{13};\frac{15}{13}\right)$$

Do H là trung điểm MM_1 nên

$$\begin{cases} x_{M_1} = 2x_H - x_M \\ y_{M_1} = 2y_H - y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M_1} = -\frac{6}{13} \\ y_{M_1} = \frac{17}{13} \end{cases} \Rightarrow M_1\left(-\frac{6}{13};\frac{17}{13}\right)$$

b) Tương tự ta có $M_1\left(\frac{283}{61};\frac{246}{61}\right)$.

3.34. Cho hai đường thẳng $\Delta: 3x + 4y - 16 = 0$ và $d: x + y - 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d′ đối xứng với đường thẳng d qua đường thẳng Δ.

Hướng dẫn giải

Gọi I là giao điểm của d và Δ, tọa độ I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x + 4y - 16 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow I(-4;7).$$

Ta lấy M(0; 3) nằm trên d và gọi N là điểm đối xứng của M qua Δ.

Khi đó $MN \perp \Delta$ nên phương trình của MN là

$$4(x - 0) - 3(y - 3) = 0 \text{ hay } 4x - 3y + 9 = 0.$$

Gọi H là giao điểm của MN và Δ, tọa độ H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x + 4y - 16 = 0 \\ 4x - 3y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{12}{25} \\ y = \frac{91}{25} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{12}{25};\frac{91}{25}\right)$$

Từ đó ta tìm được tọa độ N là $N\left(\frac{24}{25};\frac{107}{25}\right)$

Từ đó do d′ đối xứng với d qua Δ nên d′ qua hai điểm I và N. Do đó d′ có các vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{IN} = \left(\frac{124}{25};-\frac{68}{25}\right) = 4\vec{u}$ và $\vec{u} = (31;-17)$.

Vậy phương trình Δ là : $\frac{x + 4}{31} = \frac{y - 7}{-17} \Leftrightarrow 17x + 31y - 149 = 0.$

3.35. Cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -2 + t. \end{cases}$

Lập phương trình hai đường thẳng d_1 và d_2 theo thứ tự đi qua A(3 ; 0) và B(0 ; −2) sao cho Δ là phân giác của góc tạo bởi d_1 và d_2.

Hướng dẫn giải

Trước hết ta chuyển phương trình của Δ về dạng tổng quát là $x - 4y - 9 = 0$.

Gọi A′, B′ lần lượt là các điểm đối xứng của A, B qua Δ.

Khi đó $A' \in d_2$ và $B' \in d_1$.

Ta tìm được các điểm A′: $A'\left(\frac{63}{17};-\frac{48}{17}\right)$, $B'\left(\frac{2}{17};-\frac{42}{17}\right)$.

Đường thẳng d_1 qua A và B′ nên có phương trình $6x - 7y - 18 = 0$.

Đường thẳng d_2 qua B và A′ nên có phương trình $2x + 9y + 18 = 0$.

3.36. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết B(2 ; −4), phương trình đường cao qua A là $3x - 4y + 11 = 0$, phương trình phân giác trong qua C là $x + 2y - 7 = 0$.

Hướng dẫn giải

Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC biết B(2; −4), phương trình đường cao qua A là $3x - 4y + 11 = 0$, phương trình phân giác trong qua C là $x + 2y - 7 = 0$.

Dễ thấy phương trình cạnh BC vuông góc với đường cao qua A là:

$$4(x - 2) + 3(y + 4) = 0 \text{ hay } 4x + 3y + 4 = 0.$$

Từ đó tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+2y-7=0 \\ 4x+3y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{29}{5} \\ y=\dfrac{32}{5} \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{29}{5};\frac{32}{5}\right).$$

Gọi D là điểm đối xứng của B qua đường phân giác trong góc C. Khi đó D nằm trên đường thẳng CA. Phương trình BD là

$2(x-2)-1.(y+4)=0$ hay $2x-y-8=0$.

Gọi H là giao điểm của BD và đường phân giác trong góc C. Khi đó tọa độ H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+2y-7=0 \\ 2x-y-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{23}{5} \\ y=\dfrac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{23}{5};\frac{6}{5}\right)$$

Do H là trung điểm BD nên $\begin{cases} x_D=2x_H-x_B \\ y_D=2y_H-x_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=\dfrac{36}{5} \\ y=\dfrac{32}{5} \end{cases} \Rightarrow D\left(\dfrac{36}{5};\dfrac{32}{5}\right)$

Đường thẳng AC qua CD nên có vectơ chỉ phương cùng phương với $\overrightarrow{CD}=(13;0)$ hay ta có thể chọn $\vec{u}=(1;0)$ làm vectơ chỉ phương. Do đó phương trình cạnh AC là $5y-32=0$.

Điểm A nằm trên AC và đường cao qua A nên $A\left(\dfrac{73}{15};\dfrac{32}{5}\right)$.

3.37. Cho hình vuông ABCD với B(4; 1) và phương trình đường chéo AC là $x+3y-11=0$. Hãy tìm toạ độ các đỉnh A, C, D.

Hướng dẫn giải

Ta có BD ⊥ AC nên phương trình BD là $3x-y-11=0$. Gọi I là tâm của hình vuông. Khi đó toạ độ của I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+3y-11=0 \\ 3x-y-11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{22}{5} \\ y=\dfrac{11}{5} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{22}{5};\frac{11}{5}\right)$$

Vì I là trung điểm của BD nên $\begin{cases} x_D=2x_I-x_B=\dfrac{24}{5} \\ y_D=2y_I-y_B=\dfrac{16}{5} \end{cases} \Rightarrow D\left(\dfrac{24}{5};\dfrac{17}{5}\right)$

Ta có $BD=\dfrac{8}{\sqrt{10}} \Rightarrow IA=IC=\dfrac{4}{\sqrt{10}}$.

Gọi (x ; y) là toạ độ của A và C. Khi đó

$$\begin{cases} x+3y-11=0 \\ \left(x-\dfrac{22}{5}\right)^2+\left(y-\dfrac{11}{5}\right)^2=\dfrac{16}{10}=\dfrac{8}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=11-3y \\ \left(11-3y-\dfrac{22}{5}\right)^2+\left(y-\dfrac{11}{5}\right)^2=\dfrac{8}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=11-3y \\ 10\left(y-\dfrac{11}{5}\right)^2=\dfrac{8}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=11-3y \\ \left(y-\dfrac{11}{5}\right)^2=\dfrac{4}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=11-3y \\ y-\dfrac{11}{5}=\pm\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

Từ đó ta có : $A\left(\dfrac{16}{5};\dfrac{13}{5}\right)$, $C\left(\dfrac{28}{5};\dfrac{9}{5}\right)$.

3.38. Cho hình thoi ABCD có phương trình cạnh AC là $2x+y-2=0$, $D(-6;-1)$ và cạnh BC đi qua điểm $E\left(\dfrac{20}{3};\dfrac{8}{3}\right)$. Tìm toạ độ các đỉnh còn lại.

Hướng dẫn giải

Vì BD ⊥ AC nên đường thẳng BD nhận vectơ chỉ phương của AC làm vectơ pháp tuyến. Do đó phương trình BD là

$1.(x+6)-2.(y+1)=0$ hay $x-2y+4=0$.

Từ đó ta suy ra tọa độ tâm I của hình thoi là I(0 ; 2). Do I là trung điểm BD nên B(6 ; 5).

Do đường thẳng BC qua B và E nên có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{BE}=\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{7}{3}\right)$ hay $\vec{u}=(2;-7)$.

Phương trình BC là $\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-5}{-7} \Leftrightarrow 7x+2y-52=0$

Từ đó tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x+y-2=0 \\ 7x+2y-52=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16 \\ y=-30 \end{cases} \Rightarrow C(16;-30)$

Từ đó ta có A(–16 ; 34).

3.39. Cho hình bình hành ABCD có tâm I(3 ; 6), phương trình cạnh AB là $3x-2y-5=0$, đỉnh C nằm trên đường thẳng $2x+y-1=0$ và đường thẳng AD đi qua $M\left(-1;\dfrac{1}{7}\right)$. Tìm toạ độ các đỉnh của hình bình hành.

Hướng dẫn giải

Vì C nằm trên đường thẳng $2x+y-1=0$ nên $C(a;1-2a)$.

Lại do A và C đối xứng nhau qua I nên $\begin{cases} x_A=2x_I-x_C \\ y_A=2y_I-y_C \end{cases} \Rightarrow A(6-a;11+2a)$

Điểm A nằm trên đường thẳng $3x-2y-5=0$

Nên $3(6-a)-2(11+2a)-5=0 \Leftrightarrow a=\frac{-9}{7}$

Từ đó ta tính được toạ độ C và A: $C\left(-\frac{9}{7};\frac{25}{7}\right)$, $A\left(\frac{51}{7};\frac{59}{7}\right)$

* Đường thẳng CD song song AB nên phương trình có dạng
  $3x-2y+C=0$.

  Điểm C nằm trên CD nên $3.\frac{-9}{7}-2.\frac{25}{7}+C=0 \Rightarrow C=11$.

  Như thế CD có phương trình là $3x-2y+11=0$.

* Đường thẳng AM có vecto chỉ phương là $\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{58}{7};-\frac{58}{7}\right)$ hay $\vec{u}=(1;1)$.

  Do đó phương trình của AM là $7x-7y+8=0$.

* Điểm D nằm trên hai đường thẳng CD và AM nên toạ độ D là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}3x-2y+11=0\\7x-7y+8=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\frac{61}{7}\\y=-\frac{53}{7}\end{cases}$$

  Như thế $D\left(-\frac{61}{7};-\frac{53}{7}\right)$ và từ đó có $B\left(\frac{103}{7};\frac{137}{7}\right)$.

3.40. Cho tam giác ABC có tâm $M(2;0)$ là trung điểm AB. Đường trung tuyến và đường cao qua đỉnh A lần lượt có phương trình là $7x-2y-3=0$ và $6x-y-4=0$. Viết phương trình đường thẳng AC.

(Trích đề TSĐH khối D – 2009)

Hướng dẫn giải

Toạ độ A thoả mãn hệ $\begin{cases}7x-2y-3=0\\6x-y-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=2\end{cases} \Rightarrow A(1;2)$.

B đối xứng của A qua M, suy ra B(3; –2).

Đường thẳng BC qua B và vuông góc đường thẳng $6x-y-4=0$.

Phương trình BC: $x+6y+9=0$.

Toạ độ trung điểm N của đoạn thẳng BC thoả mãn hệ

$$\begin{cases}7x-2y-3=0\\x+6y+9=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=-\frac{3}{2}\end{cases} \Rightarrow N\left(0;-\frac{3}{2}\right).$$

Suy ra $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{MN}=(-4;3)$.

Từ đó, ta có phương trình đường thẳng AC là $3x-4y+5=0$.

§2. KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. *Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng*

Khoảng cách từ điểm $M(x_0;y_0)$ đến đường thẳng Δ: $ax+by+c=0$ được tính theo công thức

$$\boxed{d(M;\Delta)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}} \quad (1)$$

2. *Vị trí của hai điểm đối với một đường thẳng*

Cho hai điểm $M(x_M;y_M)$, $N(x_N;y_N)$ và đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$.

Khi đó:

M và N nằm cùng phía đối với $\Delta \Leftrightarrow (ax_M+by_M+c)(ax_N+by_N+c)>0$

M và N nằm khác phía đối với $\Delta \Leftrightarrow (ax_M+by_M+c)(ax_N+by_N+c)<0$

3. *Phương trình hai đường phân giác*

Cho hai đường thẳng cắt nhau, có phương trình:

$\Delta_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ và $\Delta_2: a_2x+b_2y+c_2=0$

Khi đó : phương trình hai đường phân giác của các góc tạo bởi $\Delta_1$và Δ_2 là

$$\boxed{\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}} \quad (2)$$

4. *Góc giữa hai đường thẳng*

- Cho hai đường thẳng $\Delta_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ và $\Delta_2: a_2x+b_2y+c_2=0$

  Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 được xác định bởi công thức

$$\boxed{\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2}}} \quad (3)$$

Chú ý : • $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow a_1a_2+b_1+b_2=0$

- Góc giữa hai đường thẳng không vượt quá 90^0.

  Do đó dấu giá trị tuyệt đối trong công thức (3) là bắt buộc.

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính khoảng cách và góc.

- *Sử dụng các công thức tính khoảng cách và góc.*
- *Chú ý rằng góc trong tam giác và góc giữa hai vecto có thể tù nhưng góc giữa hai đường thẳng chỉ có số đo thuộc [0⁰ ; 90⁰].*

- *Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm của đường thẳng này đến đường thẳng kia.*

Bài 17. a) Tính khoảng cách từ điểm M(−3 ; 5) đến đường thẳng $2x-3y+1=0$

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng

d: $4x-y+11=0$, d′: $4x-y-2=0$

Giải.

a) Ta có: $d(M;\Delta)=\dfrac{|2(-3)-3.5+1|}{\sqrt{4+9}}=\dfrac{20}{\sqrt{13}}$.

b) Dễ thấy d và d′là hai đường thẳng song song. Ta có $M(-2;3)\in d$ nên khoảng cách giữa hai đường thẳng đã cho là

$$d(M;d')=\frac{|4(-2)-3-2|}{\sqrt{16+1}}=\frac{13}{\sqrt{17}}.$$

Bài 18. a) Tính góc giữa hai đường thẳng

d: $-3x+2y-12=0$, d′: $x-5y+4=0$

b) Tính côsin của góc A trong tam giác ABC biết A(3 ;2), B(−4 ; 1), C(4 ;5) .

Giải.

a) Ta có: $\cos(d,d')=\dfrac{|-3.1+2(-5)|}{\sqrt{9+4}.\sqrt{1+25}}=\dfrac{13}{13\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy hai đường thẳng d và d′ tạo với nhau góc 45^0.

b) Ta có $\overrightarrow{AB}=(-7;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(1;3)$.

Vậy $\cos A=\dfrac{-7.1+(-1).3}{\sqrt{49+1}.\sqrt{1+9}}=\dfrac{-10}{10\sqrt{5}}=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Bài 19. Cho đường thẳng d : $3x-4y-12=0$ và điểm M(1 ; 2).

a) Tìm điểm A trên d và có hoành độ âm sao cho $OA=2\sqrt{13}$.

b) Tìm điểm N trên d sao cho khoảng cách từ M đến N là nhỏ nhất.

Giải.

a) Giả sử $A(a;b)\in d$. Khi đó $3a-4b-12=0$

Theo giả thiết ta có $\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{13}\Leftrightarrow a^2+b^2=52$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}a^2+b^2=52\\3a-4b-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+\left(\dfrac{3a-12}{4}\right)^2=52\\b=\dfrac{3a-12}{4}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}16a^2+9a^2-72a+144=832\\b=\dfrac{3a-12}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}25a^2-72a-688=0\\3a-4b-12=0\end{cases}$$

Giải phương trình bậc hai ta được hai nghiệm là $a=-4$, $a=\dfrac{172}{25}$.

Vì A có hoành độ âm nên $a=-4$. Từ đó $b=-6$.

Vậy điểm cần tìm là A(−4 ;−6).

b) Ta thấy N nằm trên d sao cho MN nhỏ nhất khi và chỉ khi N là hình chiếu vuông góc của M lên d.

Vì MN ⊥ d nên phương trình MN có dạng $4x+3y+c=0$.

Do MN qua M(1; 2) nên $4.1+3.2+c=0\Rightarrow c=-10$

Từ đó phương trình MN là $4x+3y-10=0$.

Tọa độ N là nghiệm của hệ $\begin{cases}3x-4y-12=0\\4x+3y-10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{76}{25}\\y=-\dfrac{18}{25}\end{cases}$

Vậy $N\left(-\dfrac{76}{25};\dfrac{18}{25}\right)$.

Bài 20. Cho ba đường thẳng: d: $x+y+3=0$, d′: $x-y-4=0$, d″: $x-2y=0$.

Tìm tọa độ M thuộc đường thẳng d″ sao cho khoảng cách từ M đến d bằng hai lần khoảng cách từ M đến d′.

(Trích đề TSĐH khối A − 2006)

Giải.

Vì M thuộc d″ nên M(2y ; y). Ta có :

$$d(M;\ d)=\frac{|2y+y+3|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|3y+3|}{\sqrt{2}},\ d(M;\ d')=\frac{|2y-y-4|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|y-4|}{\sqrt{2}}$$

$$d(M;\ d)=2d(M;\ d')\Leftrightarrow\frac{|3y+3|}{\sqrt{2}}=\frac{|y-4|}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\y=-11\end{array}\right.$$

Với y = 1 ta được điểm $M_1(2;1)$.

Với y = −11 ta được điểm $M_2(-22;-11)$.

Bài 21. Cho tam giác ABC cân tại C, phương trình AB là $x-2y-1=0$, t điểm AB là I(3; 1) và cạnh BC đi qua điểm $M\left(3;\dfrac{7}{2}\right)$. Biết diện tích của tam giác ABC bằng 10. Hãy xác định toạ độ các đỉnh A, B, C biết C có tung độ dương.

Giải.

Do CI ⊥ AB nên phương trình của CI có dạng $2x+y+C=0$.

Thay tọa độ điểm I vào ta được $c=-7$.

Suy ra phương trình CI : $2x+y-7=0$.

Từ đó ta có C(c ; 7 – 2c) và độ dài đường cao là :

$$CI = \sqrt{(3-c)^2 + (1-7+2c)^2} = \sqrt{5c^2 - 30c + 45}$$

Do $S_{\Delta ABC} = 10$ nên $AB = \dfrac{2S_{\Delta ABC}}{CI} = \dfrac{20}{\sqrt{5c^2 - 30c + 45}}$

Đường thẳng qua M song song với AB có phương trình x – 2y + 4 = 0. Khi đó tọa độ điểm H là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow H(2;3)$

Từ đó ta tính được

$$MH = \sqrt{(2-3)^2 + \left(3 - \frac{7}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2};\ HI = \sqrt{(2-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$$

Ta lại có: $S_{\Delta IBC} = \dfrac{1}{2} BI.IC \Rightarrow BI.IC = 2S_{\Delta BIC} = S_{\Delta ABC} = 10 \Rightarrow BI = \dfrac{10}{CI}$

Ta có theo định lí Talét: $\dfrac{MH}{IB} = \dfrac{CH}{CI} = \dfrac{CI - IH}{CI} \Rightarrow \dfrac{CI\sqrt{5}}{20} = \dfrac{CI - \sqrt{5}}{CI}$

Suy ra: $CI^2 - 4\sqrt{5}.CI + 20 = 0 \Leftrightarrow \left(CI - 2\sqrt{5}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow CI = 2\sqrt{5}$

Vì C nằm trên đường thẳng CI nên C(c ; 7– 2c).

Từ đó $\sqrt{(3-c)^2 + (2c-6)^2} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow c^2 - 6c + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 1 \\ c = 5 \end{array}\right.$

- Với c = 1 thì C(1 ; 5). Ta dễ dàng tìm được B(5; 2), A(1; 0).
- Với c = 5 thì C(5 ; –3), loại vì C có tung độ dương.

> ***Dạng 2.*** ***Viết phương trình đường thẳng thoả mãn các điều kiện cho trước về khoảng cách và góc.***
>
> - ***Phương trình đường thẳng qua*** $M(x_0;y_0)$ ***và có vectơ pháp tuyến*** $\vec{n} = (a;b)$ ***với*** $a^2 + b^2 > 0$ ***là*** $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.
> - ***Sử dụng các điều kiện về khoảng cách và góc để có một hệ thức giữa a và b.***
> - ***Chọn a, b thoả mãn hệ thức tìm được.***

Bài 22. Viết phương trình đường thẳng qua A(–2; 3) và cách B(3; –5) một khoảng bằng 5.

Giải.

Phương trình đường thẳng Δ qua điểm A có dạng

$a(x+2) + b(y-3) = 0 \Leftrightarrow ax + by + 2a - 3b = 0$, với $a^2 + b^2 > 0$.

Theo giả thiết: $d(B,\Delta) = 5 \Leftrightarrow \dfrac{|3a - 5b + 2a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 5$

$\Leftrightarrow |5a - 8b| = 5\sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow 25a^2 - 80ab + 64b^2 = 25a^2 + 25b^2$

$\Leftrightarrow 39b^2 - 80ab = 0 \Leftrightarrow b(39b - 80a) = 0 \Leftrightarrow b = 0$ hoặc $39b = 80a$.

- Với $b = 0 \Rightarrow a \neq 0$: Chọn a = 1, ta có đường thẳng $\Delta_1 : x + 2 = 0$
- Với 39b = 80a : Chọn a = 39, b = 80 và có đường thẳng $\Delta_2 : 39x + 80y - 162 = 0$

Bài 23. Viết phương trình đường thẳng qua gốc toạ độ O và tạo với đường thẳng d có phương trình x– 2y + 6 = 0 một góc 45^0.

Giải

Phương trình đường thẳng qua gốc toạ độ O có dạng $ax + by = 0$, với $a^2 + b^2 > 0$. Theo giả thiết ta có $\cos 45^0 = \dfrac{|a - 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{1+4}} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{|a - 2b|}{\sqrt{5(a^2 + b^2)}}$

Từ đó $5a^2 + 5b^2 = 2(a - 2b)^2 \Leftrightarrow 5a^2 + 5b^2 = 2a^2 - 8ab + 8b^2$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + 8ab - 3b^2 = 0 \ (*)$$

- Nếu b = 0 thì a = 0, trái với điều kiện $a^2 + b^2 > 0$
- Xét $b \neq 0$: Ta có

$(*) \Leftrightarrow 3\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 + 8.\dfrac{a}{b} - 3 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = -3$ hoặc $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{3}$

Với $\dfrac{a}{b} = -3$ ta chọn a = 3, b = – 1 và có đường thẳng $3x - y = 0$.

Với $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{3}$ ta chọn a = 1, b = 3 và có đường thẳng $x + 3y = 0$.

Bài 24. Cho hai đường thẳng $d_1 : 3x + y - 5 = 0$ và $d_2 : 2x - 6y - 11 = 0$.

Tìm tập hợp những điểm trên mặt phẳng sao cho khoảng cách từ đó đến d_1 bằng hai lần khoảng cách từ đó đến d_2.

Giải.

Giả sử M(x; y) là điểm thoả mãn yêu cầu bài toán. Ta có

$$d(M, d_1) = 2d(M, d_2) \Leftrightarrow \frac{|3x + y - 5|}{\sqrt{9+1}} = 2\frac{|2x - 6y - 11|}{\sqrt{4 + 36}}, \text{ hay}$$

$|3x + y - 5| = |2x - 6y - 11|$

$\Leftrightarrow 3x + y - 5 = 2x - 6y - 11$ hoặc $3x + y - 5 = -(2x - 6y - 11)$

$\Leftrightarrow x + 7y + 6 = 0$ hoặc $5x - 5y - 16 = 0$

Vậy tập hợp những điểm M thoả mãn yêu cầu bài toán là hai đường thẳng $x + 7y + 6 = 0$ và $5x - 5y - 16 = 0$.

Dạng 3. Tìm điểm thoả mãn các điều kiện liên quan đến góc và khoảng cách

Bài 25. Cho tam giác đều ABC nhận gốc toạ độ O làm trọng tâm. Biết trung điểm cạnh BC là $M(-2\,;-1)$. Xác định toạ độ ba đỉnh của tam giác ABC.

Giải.

Ta có $\overrightarrow{OM}=(-2;-1)$ và $\overrightarrow{OA}=-2\overrightarrow{OM}=(4;2)$. Do đó $A(4;2)$.

Tam giác ABC đều có độ dài đường cao là $AM=\sqrt{(4+2)^2+(2+1)^2}=3\sqrt{5}$.

Như thế: $AM=AB\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AB=\dfrac{2AM}{\sqrt{3}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=2\sqrt{15}$

Cạnh BC qua M và vuông góc AM nên có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AM}=(-6\,;-3)$.

Phương trình cạnh BC là

$-6(x+2)-3(y+1)=0\Leftrightarrow 2x+y+5=0$

Điểm B nằm trên cạnh BC nên $B(a\,;-2a-5)$. Ta có

$MB=\dfrac{BC}{2}=\sqrt{15}\Leftrightarrow MB^2=15\Leftrightarrow(a+2)^2+(-2a-5+1)^2=15$

hay $a^2+4a+1=0\Leftrightarrow a=-2-\sqrt{3}$ hoặc $a=-2+\sqrt{3}$.

Như thế toạ độ hai điểm B, C là $B\left(-2-\sqrt{3}\,;2\sqrt{3}-1\right),C\left(-2+\sqrt{3}\,;-2\sqrt{3}-1\right)$

hoặc $C\left(-2-\sqrt{3}\,;2\sqrt{3}-1\right),B\left(-2+\sqrt{3}\,;-2\sqrt{3}-1\right)$

Bài 26. Cho hai điểm $A(0\,;3)$, $B(2\,;6)$.

a) Tìm điểm M trên đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}x$ sao cho $\widehat{AMB}=90^0$.

b) Tìm điểm N trên đường thẳng $y=\dfrac{5}{3}x$ sao cho $\widehat{NBA}=\widehat{ANB}$.

Giải

a) Giả sử $M(2a;\,3a)$ là điểm nằm trên đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}x$ thoả mãn yêu cầu bài toán. Ta có

$\overrightarrow{MA}=(-2a;\,3-3a)$, $\overrightarrow{MB}=(2-2a;\,6-3a)$, $\overrightarrow{AB}=(2;\,3)$.

Ta có: $\widehat{AMB}=90^0\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0\Leftrightarrow-2a(2-2a)+(3-3a)(6-3a)=0$

$\Leftrightarrow 13a^2-31a+18=0\Leftrightarrow a=1$ hoặc $a=\dfrac{18}{13}$

- Với $a=1$ ta có điểm $M_1(2;3)$.
- Với $a=\dfrac{18}{13}$ ta có điểm $M_2\left(\dfrac{36}{13};\dfrac{54}{13}\right)$.

Hướng dẫn giải

a) $\alpha = 45^0$ b) $\alpha = 60^0$ c) $\cos\alpha = \dfrac{5}{\sqrt{34}}$ d) $\cos\alpha = \dfrac{8}{\sqrt{170}}$

3.44. Cho tam giác ABC với $A(-2;1), B(4;7), C(-1;4)$. Tính côsin các góc của tam giác ABC và cho biết các góc này nhọn hay tù.

Hướng dẫn giải

$\overrightarrow{AB} = (6;6), \overrightarrow{AC} = (1;3)$

Suy ra $\cos A = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{6.1+6.3}{\sqrt{36+36}.\sqrt{1+9}} = \dfrac{24}{12\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} > 0 \Rightarrow A$ nhọn.

Tương tự, ta có $\cos B = \dfrac{8}{\sqrt{68}}, \cos C = \dfrac{-7}{\sqrt{85}} \Rightarrow B$ nhọn, C tù.

Các góc A và B nhọn, góc C tù.

- **Điểm và đường thẳng thoả điều kiện về góc và khoảng cách**

3.45. Viết phương trình đường thẳng trong các trường hợp sau đây :

a) Qua điểm M(3; 2) và tạo với d: $x + y\sqrt{3} + 2 = 0$ một góc 60^0 ;

b) Qua M(3; –4) và tạo với hai đường thẳng có các phương trình sau 2x + y – 3 = 0, 3x – 6y + 11 = 0 các góc bằng nhau;

c) Qua điểm M(3 ; –4) và tạo với trục hoành một góc 45^0.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình đường thẳng qua $M(3;2)$ có dạng

$a(x-3) + b(y-2) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 3a - 2b = 0,\ a^2 + b^2 > 0$

Vì đường thẳng nói trên tạo với đường thẳng $x + \sqrt{3}y + 2 = 0$ một góc 60^0 nên $\dfrac{|a + b\sqrt{3}|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{1+3}} = \cos 60^0 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2|a + b\sqrt{3}| = 2\sqrt{a^2+b^2}$, hay

$4(a^2 + 2ab\sqrt{3} + 3b^2) = 4a^2 + 4b^2 \Leftrightarrow b^2 + ab\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow b(b + a\sqrt{3}) = 0$.

Từ đó có $b = 0$ hoặc $b = -a\sqrt{3}$.

+ Với $b = 0$ thì $a \neq 0$. Ta chọn $a = 1$ và có đường thẳng $x - 3 = 0$.

+ Với $b = -a\sqrt{3}$ ta chọn $a = 1, b = -\sqrt{3}$ và có đường thẳng $x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} - 3 = 0$.

b) Phương trình đường thẳng Δ qua $M(3;-4)$ có dạng

$a(x-3) + b(y+4) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 3a + 4b = 0, a^2 + b^2 > 0$

Vì Δ tạo với hai đường thẳng $2x + y - 3 = 0$ và $3x - 6y + 11 = 0$ các góc bằng nhau nên

$$\frac{|2a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{4+1}} = \frac{|3a-6b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{9+36}} \Leftrightarrow |2a+b| = \frac{|3a-6b|}{3}$$

$\Leftrightarrow 3(2a+b) = 3a - 6b$ hoặc $3(2a+b) = -(3a-6b)$

$\Leftrightarrow a = -3b$ hoặc $3a = b$

+ Với $a = -3b$ ta chọn $a = 3, b = -1$ và có đường thẳng $\Delta_1 : 3x - y - 13 = 0$

+ Với $3a = b$ ta chọn $a = 1, b = 3$ và có đường thẳng $\Delta_2 : x + 3y + 9 = 0$

c) Đường thẳng tạo với trục hoành góc 450 khi và chỉ khgi hệ số góc của nó là 1 hoặc – 1. Từ đó ta có ghai đáp số.

$x - y - 7 = 0,\ x + y + 1 = 0$.

3.46. Viết phương trình đường thẳng trong mỗi trường hợp sau đây :

a) Qua điểm M(1; 2) và cách điểm N(3; 5) một khoảng là 2 ;

b) Song song và cách đều hai đường thẳng 3x – 2y + 6 = 0, 3x – 2y – 3 = 0 ;

c) Qua điểm M(3; –4) và cách đều hai điểm A(3 ; 2) và B(–1 ; 4).

Hướng dẫn giải

a) Phương trình đường thẳng Δ qua $M(1;2)$ có dạng

$a(x-1) + b(y-2) = 0 \Leftrightarrow ax + by - a - 2b = 0,\ a^2 + b^2 > 0$

Theo giả thiết

$d(N,\Delta) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{|3a + 5b - a - 2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2 \Leftrightarrow |2a - 3b| = 2\sqrt{a^2+b^2}$

$\Leftrightarrow 4a^2 - 12ab + 9b^2 = 4a^2 + 4b^2 \Leftrightarrow b(5b - 12a) = 0$

Từ đó ta có hai đường thẳng thoả mãn yêu cầu bài toán

$x - 1 = 0,\ 5x + 12y - 29 = 0$.

b) Phương trình đường thẳng Δ có dạng $3x - 2y + C = 0$ với $C \notin \{6;-3\}$

Ta chọn $A(0;3)$ thuộc đường thẳng $3x - 2y + 6 = 0$ và điểm $A(0;1)$ thuộc đường thẳng $3x - 2y - 3 = 0$. Vì Δ cách đều hai đường thẳng trên nên

$d(A,\Delta) = d(B,\Delta) \Leftrightarrow \dfrac{|3.0 - 2.3 + C|}{\sqrt{9+13}} = \dfrac{|3.0 - 2.1 + C|}{\sqrt{9+13}}$

hay $|C - 6| = |C - 2| \Leftrightarrow C - 6 = C - 2$ hoặc $C - 6 = -(C - 2) \Leftrightarrow C = 4$.

Vậy phương trình đường thẳng Δ là $3x - 2y + 4 = 0$.

c) Có hai đường thẳng thoả mãn yêu cầu bài toán là

$x + 2y + 5 = 0$ và $7x + 2y - 13 = 0$.

3.47. Cho tam giác ABC với A(2 ; 0), B(4 ; 1), C(1 ; 2).

a) Viết phương trình các cạnh AB, AC.

$\Leftrightarrow |-2a+8| = 2\sqrt{5}.\sqrt{17a^2+30a+18}$

$\Leftrightarrow 4a^2 - 32a + 64 = 340a^2 + 600a + 360$

$\Leftrightarrow 42a^2 + 79a + 37 = 0 \Leftrightarrow a = -1$ hoặc $a = -\dfrac{37}{42}$

Từ đó ta có hai điểm thoả mãn yêu cầu bài toán là $M_1(-1;5)$ và $M_1\left(-\dfrac{37}{42};\dfrac{95}{21}\right)$

3.51. Cho tam giác ABC với $A\left(\dfrac{4}{5};\dfrac{7}{5}\right)$. Phương trình hai đường phân giác là d_1: $x-2y-1=0$ và d_2 : $x+2y-1=0$. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Dễ thấy d_1, d_2 không đi qua A.

Do đó d_1, d_2 là các đường phân giác qua B và C .

Gọi D, E lần lượt là các điểm đối xứng của A qua d_1, d_2.

Khi đó E, F nằm trên BC.

Ta tìm được $D(2;-1)$, $E\left(-\dfrac{6}{15};-\dfrac{17}{25}\right) \Rightarrow \overrightarrow{DE} = \left(-\dfrac{56}{25};\dfrac{8}{25}\right)$

Đường thẳng BC là $x+7y+5=0$.

Tọa độ B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+7y+5=0 \\ x-2y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{3} \\ y=-\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow B\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$

Tọa độ C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+7y+5=0 \\ x+2y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{17}{5} \\ y=-\dfrac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow C\left(\dfrac{17}{5};-\dfrac{6}{5}\right)$

Từ đó ta tìm được phương trình các cạnh AB, AC là :

AB: $31x-17y-1=0$, AC : $5x+5y-11=0$.

3.52. Cho hai đường thẳng d : $7x-y+11=0$ và d': $x+y-2=0$.

a) Viết phương trình các đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng d và d'.

b) Viết phương trình phân giác của góc tạo bởi d, d'mà miền góc này có chứa gốc toạ độ O.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình các đường phân giác của góc tạo bởi d và d' là:

$$\frac{|7x-y+11|}{\sqrt{49+1}} = \frac{|x+y-2|}{\sqrt{1+1}} \Leftrightarrow \frac{|7x-y+11|}{5\sqrt{2}} = \frac{|x+y-2|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x-y+11=5(x+y-2) \\ 7x-y+11=-5(x+y-2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-6y+21=0 \\ 12x+4y+1=0 \end{array}\right.$$

Phương trình hai đường phân giác là: Δ_1: $2x-6y+21=0$ và Δ_2: $12x+4y+1=0$.

b) Lấy $A\left(0;-\dfrac{1}{4}\right) \in \Delta_2$.

Ta có $(7x_A - y_A + 11)(7x_O - y_O + 11) > 0$ và $(x_A + y_A - 2)(x_O + y_O - 2) > 0$ nên O và A nằm cùng phía đối với d và d'.

Vậy Δ_2 : $x+y-2=0$ là phân giác của miền góc chứa gốc O.

3.53. Cho tam giác ABC cân tại C có phương trình các cạnh AB, AC lần lượt là $2x-3y+11=0$, $x+5y-14=0$. Biết $M(3;-3)$ thuộc cạnh BC.

Hãy viết phương trình cạnh BC.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\cos A = \dfrac{|2.1+(-3)5|}{\sqrt{4+9}.\sqrt{1+25}} = \dfrac{13}{13\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A = 45^0$

Phương trình cạnh BC qua $M(3;-3)$ có dạng

$a(x-3)+b(y+3)=0 \Leftrightarrow ax+by-3a+3b=0$ $(a^2+b^2>0)$

Tam giác ABC cân tại C nên $\hat{B} = \hat{A} \Rightarrow \cos B = \cos A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Từ đó

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|2a-3b|}{\sqrt{4+9}.\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sqrt{26(a^2+b^2)} = 2|2a-3b|$$

hay $26a^2+26b^2 = 4(4a^2-12ab+9b^2) \Leftrightarrow 5a^2+24ab-5b^2=0$. (*)

- $b=0 \Rightarrow a=0$ (mâu thuẫn)
- $b \neq 0$:(*) $\Leftrightarrow 5\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 + 24\dfrac{a}{b} - 5 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{5}$ hoặc $\dfrac{a}{b} = -5$.

Với $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{5}$ thì ta chọn $a=1, b=5$ và phương trình (BC) là $x+5y+12=0$

Với $\dfrac{a}{b} = -5$ thì ta chọn $a=5, b=-1$ và phương trình (BC) là $5x-y-18=0$

Dễ thấy đường thẳng $x+5y+12=0$ song song với AC nên bị loại. Do đó phương trình cạnh BC là $5x-y-18=0$.

3.54. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 2AD, phương trình cạnh AB là $x-2y+2=0$, tâm của hình chữ nhật là $I\left(\dfrac{1}{2};0\right)$. Xác định toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Vì A nằm trên d nên A(a; 3a + 2).

a) Do tam giác ABC vuông cân tại C nên

$$AH = CH \Leftrightarrow \sqrt{\left(-\frac{3}{5}-a\right)^2+\left(\frac{1}{5}-3a-2\right)^2}=\sqrt{\frac{72}{5}}$$

$$\Leftrightarrow 5a^2+6a-\frac{27}{5}=0 \Leftrightarrow a=\frac{3}{5} \text{ hoặc } a=-\frac{9}{5}$$

Từ đó ta được kết quả: $A\left(\frac{3}{5};\frac{19}{5}\right), B\left(-\frac{9}{5};-\frac{17}{5}\right)$ và $A\left(-\frac{9}{5};-\frac{17}{5}\right), B\left(\frac{3}{5};\frac{19}{5}\right)$.

b) Tam giác ABC đều nên $CH = AH\sqrt{3} \Rightarrow AH = \frac{CH}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{24}{5}}$

Do đó $\frac{9}{25}+\frac{6a}{5}+a^2+9a^2+\frac{54}{5}a+\frac{81}{25}=\frac{24}{5}$

$$\Leftrightarrow 10a^2+12a-\frac{6}{5}=0 \Leftrightarrow 25a^2+30a-3=0 \Leftrightarrow a=\frac{-3\pm 2\sqrt{3}}{5}$$

Từ đó ta suy được toạ độ các điểm A, B cần tìm.

3.58*. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm A(2; 2) và hai đường thẳng d_1: $x + y - 2 = 0$, d_2: $x + y - 8 = 0$.

Tìm tọa độ các điểm B và C lần lượt thuộc d_1 và d_2 sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

(Trích đề thi TSĐH khối B – 2007)

Hướng dẫn giải

Viết lại phương trình d_1 và d_2: d_1: $y = 2 - x$, d_2: $y = 8 - x$.

Do B, C lần lượt thuộc d_1 và d_2 nên B(a ; 2–a), C(b ; 8–b).

Từ đó $\overrightarrow{AB}=(a-2;-a)$, $\overrightarrow{AC}=(b-2;6-b)$

Do tam giác ABC vuông cân tại A nên

$$\begin{cases}AB = AC\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a-2)^2+a^2=(b-2)^2+(6-b)^2\\ (a-2)(b-2)-a(6-b)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(a-2)^2+a^2=(b-2)^2+(b-6)^2\\ (a-2)(b-2)+a(b-6)=0\end{cases}$$

Đặt $u = a - 1$, $v = b - 4$, ta có hệ

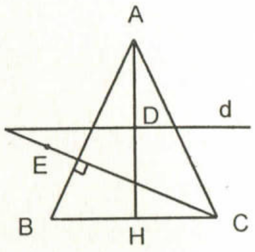
$$\begin{cases}uv=2\\ u^2-v^2=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v=2/u\\ u^2-4/u^2=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v=2/u\\ u^4-3u^2-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v=2/u\\ u^2=4\end{cases}$$

- Với u = 2 ta được v = 1 và a = 3, b = 5. Ta có các điểm B(3 ;–1), C(5;3).
- Với u = –2 ta được v = –1 và a = –1, b = 3. Ta có các điểm B(–1 ; 3), C(3 ; 5).

3.59*. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh A(6 ; 6) ; đường thẳng Δ đi qua trung điểm của các cạnh AB và AC có phương trình x + y – 4 = 0. Tìm tọa độ các đỉnh B và C biết điểm E(1;–3) nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác đã cho.

(Trích đề thi TSĐH khối A – 2010)

Hướng dẫn giải



Gọi H là trung điểm BC, D là trung điểm AH.

Ta có AH ⊥ BC. Do đó toạ độ D (x ; y) thoả mãn hệ

$$\begin{cases}x+y-4=0\\ x-y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases} \Rightarrow D(2;2) \Rightarrow H(-2;-2)$$

Đường thẳng BC qua H và song song d,

suy ra BC có phương trình: x + y + 4 = 0.

Điểm B, C thuộc đường thẳng BC : x + y + 4 = 0 và B, C đối xứng nhau qua H, do đó toạ độ B, C có dạng : $B(t;-4-t)$, $C-4-t;t)$.

Điểm E(1 ; –3) nằm trên đường cao qua đỉnh C của ΔABC, suy ra

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CE}=0 \Leftrightarrow (t-6)(5+t)+(-10-t)(-3-t)=0$

$$\Leftrightarrow 2t^2-12t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=0\\ t=6\end{array}\right.$$

Ta được B(0 ; –4), C(–4 ; 0) hoặc B(–6 ; 2), C2 ; –6).

3.60. Cho hình thoi ABCD có đỉnh $A(-2;5)$, $C(2;1)$, $\cos\widehat{BAD}=\frac{3}{5}$. Xác định toạ độ các đỉnh còn lại của hình thoi, biết rằng đỉnh B có hoành độ dương.

Hướng dẫn giải

Gọi I là tâm hình thoi. Khi đó $I(0;3)$. Đường chéo BD vuông góc với AC nên nhận $\overrightarrow{AC}=(4;-4)$ làm vectơ pháp tuyến. Phương trình đường chéo BD là $4(x-0)-4(y-3)=0 \Leftrightarrow x-y+3=0$.

Giả sử $B(a;b)$. Khi đó $a-b+3=0 \Leftrightarrow b=a+3$. Vậy $B(a;a+3)$ với $a>0$. Vì I là trung điểm BD nên $D(-a;3-a)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(a+2;a-2)$, $\overrightarrow{AD}=(-a+2;-a-2)$. Theo giả thiết

$$\cos A=\frac{3}{5}=\frac{(a+2)(-a+2)+(a-2)(-a-2)}{\sqrt{(a+2)^2+(a-2)^2}.\sqrt{(-a+2)^2+(-a-2)^2}}=\frac{8-2a^2}{2a^2+8}=\frac{4-a^2}{4+a^2}$$

Từ đó $12+3a^2=20-5a^2 \Leftrightarrow a^2=1 \Leftrightarrow a=1$

Vậy $B(1;4)$, $D(-1;2)$.

§3. ĐƯỜNG TRÒN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. *Phương trình đường tròn*

- Phương trình đường tròn (C) có tâm $I(x_0;y_0)$, bán kính bằng R là

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \qquad (1)$$

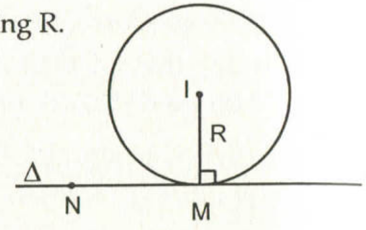
- Khai triển (1), phương trình của đường tròn (C) có dạng

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0 \qquad (2)$$

trong đó $a^2+b^2>c$, với phương trình này, (C) có tâm I(–a; –b) và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

2. *Phương trình tiếp tuyến của đường tròn*

Cho đường tròn (C) có tâm I(a; b), bán kính bằng R.



- Tiếp tuyến với (C) tại $M(x_0;y_0)$:

  Đó là đường thẳng d đi qua M và nhận $\overrightarrow{MI}=(a-x_0;b-y_0)$ làm vectơ pháp tuyến.

- Trường hợp tiếp tuyến Δ qua N hoặc Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B)$: Ta viết phương trình Δ ở dạng tổng quát Ax + By + C = 0 rồi áp dụng điều kiện tiếp xúc sau :

  Δ tiếp xúc đường tròn (C) ⇔ $\boxed{d(I;\Delta)=R}$

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 1. Viết phương trình đường tròn (C) – Tìm tâm và bán kính đường tròn (C).

* *Tìm tọa độ tâm I(a ; b) và tính bán kính R của (C) rồi áp dụng phương trình (1).*

* *Đối với bài toán viết phương trình đường tròn qua 3 điểm, ta thường áp dụng phương trình (2).*

* *Muốn viết phương trình đường tròn cần chú ý tính chất : M thuộc (C) khi và chỉ khi tọa độ M thoả mãn phương trình (C).*

Bài 27. Viết phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

a) Tâm I(–2; 3), bán kính R = 4.

b) Nhận AB làm đường kính với A(–2; 6), B(4 ; –2).

c) Tâm I(–1 ; 2) và tiếp xúc với đường thẳng $x-2y+7=0$.

d) Qua ba điểm $A(-2;4)$, $B(5;5)$, $C(6;-2)$.

Giải

a) Phương trình đường tròn là $(x+2)^2+(y-3)^2=16$.

b) Gọi I là tâm đường tròn.

Khi đó I là trung điểm đoạn AB, suy ra I(1 ; 2). Ta có

$$R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(4+2)^2+(-2-6)^2}}{2}=\frac{10}{2}=5$$

Vậy phương trình đường tròn đường kính AB là $(x-1)^2+(y-2)^2=25$.

c) Vì đường tròn tiếp xúc với đường thẳng $x-2y+7=0$ nên bán kính đường tròn là $R=d(I;d)=\dfrac{|-1-2.2+7|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Vậy phương trình đường tròn là $(x+1)^2+(y-2)^2=\dfrac{4}{5}$

d) Phương trình đường tròn có dạng $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ với $a^2+b^2>c$.

Do đường tròn qua ba điểm A, B, C nên

$$\begin{cases}4+16-4a+8b+c=0\\25+25+10a+10b+c=0\\35+4+12a-4b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=-1\\c=-20\end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn là $x^2+y^2-4x-2y-20=0$.

Bài 28. Viết phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau :

a) Đi qua hai điểm $A(5;7)$, $B(-2;4)$ và có tâm nằm trên đường thẳng $4x+3y-18=0$;

b) Có tâm nằm trên đường thẳng $4x+y+12=0$ và tiếp xúc với đường thẳng d có phương trình $2x+y-4=0$ tại điểm $M(1;2)$.

Giải

a) Gọi I(x ; y) là tâm đường tròn. Theo giả thiết :

$$\begin{cases}IA=IB\\I\in(d)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{(x-5)^2+(y-7)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}\\4x+3y-18=0\end{cases}$$

Hay $\begin{cases}7x+3y-27=0\\4x+3y-18=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$

Do đó tâm đường tròn là I(3 ; 2) và bán kính đường tròn là

$$R=IA=\sqrt{(5-3)^2+(7-2)^2}=\sqrt{29}$$

Vậy phương trình đường tròn là $(x-3)^2+(y-2)^2=29$.

Do đó xảy ra I(3; 1) hoặc I(7 ; 3).

Vậy có hai đường tròn thoả mãn ycbt có các phương trình là

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25 \text{ và } (x-7)^2 + (y-3)^2 = 25.$$

b) Gọi H là hình chiếu của A lên d. Ta có $R = IA \geq AH$. Do đó

$$\min R = AH \Leftrightarrow I \equiv H \text{ hay } IA \perp \Delta.$$

Ta có: $\overrightarrow{IA} = (2-2a\,;6-a)$

Vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (2;1)$

Ta có : $\overrightarrow{IA} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}.\vec{u} = 0$

Từ đó : $2(2-2a) + 1.(6-a) = 0$ hay $-5a + 10 = 0 \Rightarrow a = 2$.

Do đó $I(5; 2)$ và $R = 2\sqrt{5}$.

Vậy phương trình đường tròn là $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 20$.

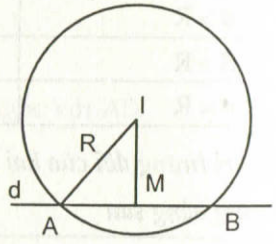
Bài 31. Cho hai đường thẳng $d : 3x - 4y + 5 = 0$ và $d' : -2x + y - 3 = 0$.

a) Viết phương trình đường tròn nhận $I(2\,;-1)$ làm tâm và cắt d tại hai điểm A, B sao cho $AB = 4$.

b*) Viết phương trình đường tròn có tâm nằm trên d′ có tung độ âm, cắt d tại A và B, cắt trục hoành tại C và D sao cho $AB = CD = 4$.

Giải

a) Gọi M là trung điểm đoạn AB. Khi đó $AM = 2$.



Ta có $IM = d(I;d) = \dfrac{|3.2 - 4(-1) + 5|}{\sqrt{9+16}} = 3.$

Áp dụng định lý Pitago cho tam giác vuông IAM, ta có: $IA = \sqrt{IM^2 + AM^2} = \sqrt{9+2} = \sqrt{11}$

Vậy phương trình đường tròn là

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 11.$$

b) Gọi I(a; b) là tâm đường tròn. Vì I nằm trên d′ nên $-2a + b - 3 = 0$.

Theo giả thiết AB = CD nên

$$d(I;d) = d(I;Ox) \Leftrightarrow \frac{|3a-4b+5|}{\sqrt{9+16}} = |b| \Leftrightarrow |3a-4b+5| = 5|b|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a-4b+5=5b \\ 3a-4b+5=-5b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a-9b+5=0 \\ 3a+b+5=0 \end{array}\right.$$

- Xét $3a - 9b + 5 = 0$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 3a-9b+5=0 \\ -2a+b-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{22}{15} \\ b = \dfrac{1}{15} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\dfrac{22}{15};\dfrac{1}{15}\right)$

Ta loại trường hợp này vì theo giả thiết I có tung độ âm.

- Xét $3a + b + 5 = 0$.

Ta có hệ : $\begin{cases} 3a+b+5=0 \\ -2a+b-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{8}{5} \\ b=-\dfrac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\dfrac{8}{5};-\dfrac{1}{5}\right)$.

Khi đó $IM = d(I ; Ox) = |y_I| = |-\dfrac{1}{5}| = \dfrac{1}{5}$

Từ đó bán kính đường tròn là $IA = \sqrt{IM^2 + AM^2} = \sqrt{4 + \dfrac{1}{25}} = \dfrac{\sqrt{101}}{5}$

Vậy phương trình đường tròn là $\left(x+\dfrac{8}{5}\right)^2 + \left(y+\dfrac{1}{5}\right)^2 = \dfrac{101}{25}$.

Dạng 2. Vị trí tương đối của hai đường tròn, của đường thẳng và đường tròn.

- *Vị trí tương đối của đường thẳng Δ và đường tròn* $C(I ; R)$ *được cho trong bảng sau (với d là khoảng cách từ I đến Δ).*

Dấu hiệu	Số điểm chung	Vị trí tương đối
$d > R$	0	d và (C) không giao nhau
$d = R$	1	d và (C) tiếp xúc nhau
$d < R$	2	d và (C) cắt nhau

- *Vị trí tương đối của hai đường tròn* $(I_1 ; R_1)$ *và* $(I_2 ; R_2)$, *với* $R_2 \geq R_1$, *được cho trong bảng sau*

Dấu hiệu	Số điểm chung	Vị trí tương đối
$I_1I_2 > R_1 + R_2$	0	Nằm ngoài nhau
$I_1I_2 < R_2 - R_1$	0	Chứa nhau
$I_1I_2 = R_1 + R_2$	1	Tiếp xúc ngoài
$I_1I_2 = R_2 - R_2$	1	Tiếp xúc trong
$R_2 - R_1 < I_1I_2 < R_2 + R_1$	2	Cắt nhau

Bài 32. Cho hai đường tròn

$(C_1): x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23 = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 - 26x - 2y + 45 = 0$.

a) Chứng minh rằng (C₁) và (C₂) cắt nhau tại hai điểm A, B.

b) Viết phương trình đường thẳng AB.

Giải

a) Dễ dàng tìm được:

(C₁) có tâm $I_1(-1 ; -1)$ và bán kính $R_1 = 5$.

(C₂) có tâm $I_2(13 ; 1)$ và bán kính $R_2 = 5\sqrt{5}$.

Ta có $I_1I_2 = \sqrt{(13+1)^2 + (1+1)^2} = 10\sqrt{2} < R_1 + R_2$.

Vậy (C₁) và (C₂) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B.

b) Toạ độ các giao điểm A, B của (C₁) và (C₂) thoả mãn hệ

$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0 \\ x^2 + y^2 - 26x - 2y + 45 = 0 \end{cases} \Rightarrow 24x - 68 = 0$

Vậy phương trình đường thẳng AB là $6x - 17 = 0$.

Bài 33. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 1 = 0$.

a) Kiểm tra xem điểm M(–1; 1) nằm bên trong hay bên ngoài đường tròn.

b) Viết phương trình đường thẳng d qua M(–1; 1) và cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB = R\sqrt{3}$.

Giải

Dễ thấy tìm được (C) có tâm $I(2 ; -3)$ và bán kính $R = 2\sqrt{3}$.

a) Ta có $IM = \sqrt{(-1-2)^2 + (1+3)^2} = 5 > 2\sqrt{3} = R$.

Vậy điểm M nằm bên ngoài đường tròn (C).

b) Gọi H là trung điểm của dây AB. Khi đó OI vuông góc với AB.

Ta có $\cos\widehat{IBA} = \dfrac{HB}{IB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{IBA} = 30^0$

Từ đó ta có $d(I,d) = IH = \dfrac{R}{2} = \sqrt{3}$

Phương trình đường thẳng qua M(–1 ; 1) có dạng

$a(x+1) + b(y-1) = 0 \Leftrightarrow ax + by + a - b = 0 (a^2 + b^2 > 0)$

Như thế $d(I,d) = IH = \sqrt{3} = \dfrac{|2a - 3b + a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow |3a - 4b| = \sqrt{3(a^2 + b^2)}$,

hay $9a^2 + 16b^2 - 24ab = 3a^2 + 3b^2 \Leftrightarrow 6a^2 - 24ab + 13b^2 = 0$

* Nếu $b = 0$ thì $a = 0$ (vô lí).

* Xét $b \neq 0$: Chia hai vế của đẳng thức trên cho b^2 ta được

$6\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 - 24\dfrac{a}{b} + 13 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{12 - \sqrt{66}}{6}$ hoặc $\dfrac{a}{b} = \dfrac{12 + \sqrt{66}}{6}$

- Với $\frac{a}{b} = \frac{12 - \sqrt{66}}{6}$ thì ta chọn $a = 12 - \sqrt{66}, b = 6$.

Phương trình đường thẳng d là $\left(12 - \sqrt{66}\right)x + 6y + 6 - \sqrt{66} = 0$.

- Với $\frac{a}{b} = \frac{12 + \sqrt{66}}{6}$ thì ta chọn $a = 12 + \sqrt{66}, b = 6$.

Phương trình đường thẳng d là $\left(12 + \sqrt{66}\right)x + 6y + 6 + \sqrt{66} = 0$.

Bài 34. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ và đường thẳng $d_m : mx + (2m - 3)y + 2 = 0$.

a) Tìm m sao cho d_m cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm m sao cho d_m cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất (I là tâm của (C)).

Giải.

a) Đường tròn (C) có tâm I(2 ; −1) và có bán kính $R = \sqrt{5}$.

Điều kiện để d_m cắt (C) tại hai điểm phân biệt là $d(I ; d_m) < R$

$$\Leftrightarrow \frac{|m.2 + (2m-3)(-1) + 2|}{\sqrt{m^2 + (2m-3)^2}} < \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|5|}{\sqrt{5m^2 - 12m + 9}} < \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 - 12m + 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < \frac{2}{5} \\ m > 2 \end{array}\right.$$

Vậy với $m < \frac{2}{5}$ hoặc $m > 2$ thì d_m cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

b) Tam giác IAB có diện tích là: $S = \frac{1}{2}.IA.IB.\sin\widehat{AIB} \le \frac{R^2}{2} = \frac{5}{2}$

Từ đó S đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi

$$\sin\widehat{AIB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{AIB} = 90^0 \Leftrightarrow IH = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

ở đây H là trung điểm AB. Do đó d_m phải cách tâm I của (C) một khoảng là $\frac{\sqrt{5}}{2}$ hay $\frac{|m.2 + (2m-3)(-1) + 2|}{\sqrt{m^2 + (2m-3)^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow \frac{|5|}{\sqrt{5m^2 - 12m + 9}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

$$\Leftrightarrow 5m^2 - 12m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{6 \pm \sqrt{41}}{5}.$$

Vậy có hai giá trị m thoả mãn là $m = \frac{6 \pm \sqrt{41}}{5}$.

> ***Dạng 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) có tâm I, bán kính R.***
>
> *1) Tiếp tuyến với (C) tại một điểm $M \in (C)$: Đó chính là đường thẳng Δ qua M và nhận $\overrightarrow{MI}$ làm vectơ pháp tuyến.*
>
> *2) Tiếp tuyến Δ của (C) có một trong các tính chất sau :*
>
> - *Δ // d : $ax + by + c = 0 \Rightarrow$ phương trình Δ : $ax + by + c' = 0$ với $c' \ne c$.*
> - *Δ ⊥ d : $ax + by + c = 0 \Rightarrow$ phương trình Δ : $bx - ay + c' = 0$.*
> - *Δ đi qua điểm $N(x_0 ; y_0) \Rightarrow$ phương trình Δ : $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, trong đó $\vec{n} = (a; b)$ là vectơ pháp tuyến của Δ.*
>
> *+ Chú ý : ▲ Người ta dùng tính chất d(I ; Δ) = R để tìm c′ hoặc tìm a, b trong các phương trình trên.*
>
> *▲ Ngoài ra, người ta cũng dùng tính chất d(I ; Δ) = R để xét vị trí tương đối của đường tròn (C) với một đường thẳng Δ.*

Bài 35. Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại A(1 ; 2).

b) Viết phương trình các tiếp tuyến của (C), biết rằng các tiếp tuyến đó đi qua M(6; 8).

Giải.

Dễ thấy (C) có tâm I(−1 ; 2), bán kính R = 2.

a) Thay toạ độ của A vào phương trình đường tròn :

$$1^2 + 2^2 + 2.1 - 4.2 + 1 = 0 \Rightarrow A \in (C)$$

Tiếp tuyến tại A nhận $\overrightarrow{IA} = (2 ; 0)$ làm vectơ pháp tuyến nên phương trình của tiếp tuyến là $2(x - 1) + 0(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$.

b) Phương trình tiếp tuyến d qua M(6; 8) có dạng :

$$a(x - 6) + b(y - 8) = 0 \ (a^2 + b^2 > 0) \quad \text{hay } ax + by - 6a - 8b = 0.$$

Δ tiếp xúc (C) khi và chỉ khi

$$d(I;\Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|-a + 2b - 6a - 8b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2 \Leftrightarrow |-7a - 6b| = 2\sqrt{a^2 + b^2}$$

Suy ra $45a^2 + 84ab + 32b^2 = 0$.

- Nếu b = 0 thì a = 0 (vô lí).
- Xét b ≠ 0. Khi đó: $45\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 84.\frac{a}{b} + 32 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{b} = -\frac{8}{15} \\ \frac{a}{b} = -\frac{4}{3} \end{array}\right.$

Với $\frac{a}{b} = -\frac{8}{15}$: Chọn a = 8, b = −15 ta có tiếp tuyến: $d_1 : 8x - 15y + 72 = 0$

Với $\frac{a}{b} = -\frac{4}{3}$: Chọn a = 4, b = −3 ta có tiếp tuyến: $d_2 : 4x - 3y = 0$.

Bài 36. Cho đường tròn (C): $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) trong mỗi trường hợp sau đây :

a) Tiếp tuyến song song với đường thẳng $-4x + 3y + 2012 = 0$;

b) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $4x - 3y - 2007 = 0$;

c) Tiếp tuyến tạo với đường thẳng $x - 7y - 2013 = 0$ một góc 45^0.

Giải

Ta có đường tròn (C) có tâm I(4 ; −3) và bán kính R = 5.

a) Gọi tiếp tuyến cần tìm là Δ. Vì Δ // d: $4x - 3y - 2012 = 0$ nên phương trình của Δ có dạng $4x - 3y + C = 0$ với $C \neq 2012$.

Δ tiếp xúc (C) khi và chỉ khi

$$d(I;\Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|4.4 - 3.(-3) + C|}{\sqrt{16+9}} = 5 \Leftrightarrow |C + 25| = 25$$

Từ đó ta có $C + 25 = 25$ hoặc $C + 25 = -25 \Rightarrow C = 0$ hoặc $C = -50$ (thoả điều kiện $C \neq 2012$).

Vậy có hai tiếp tuyến thoả mãn yêu cầu bài toán là

$4x - 3y = 0$ và $4x - 3y - 50 = 0$.

b) Cho tiếp tuyến $\Delta' \perp d' : 4x - 3y - 2007 = 0$. Phương trình của tiếp tuyến Δ′ có dạng $3x + 4y + C = 0$.

Điều kiện tiếp xúc của Δ′ và (C) là

$$d(I;\Delta') = R \Leftrightarrow \frac{|3.4 + 4.(-3) + C|}{\sqrt{16+9}} = 5 \Leftrightarrow |C| = 25$$

Từ đó có C = ± 25.

Vậy có hai tiếp tuyến thoả mãn yêu cầu bài toán là

$3x + 4y - 25 = 0$ và $3x + 4y + 25 = 0$.

c) Gọi $\vec{n} = (a;b)$ với $a^2 + b^2 > 0$ là vectơ pháp tuyến của tiếp tuyến Δ_1 cần tìm.

Vì tiếp tuyến Δ_1 tạo với đường thẳng $x - 7y - 2013 = 0$ một góc là 45^0 nên

$$\cos 45^0 = \frac{|a - 7b|}{\sqrt{1+49}.\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow 10\sqrt{a^2+b^2} = 2|a - 7b|.$$

Hay $100(a^2 + b^2) = 4(a^2 - 14ab + 49b^2) \Leftrightarrow 24a^2 + 14ab - 24b^2 = 0$.

Nếu b = 0 thì a = 0. Vô lí. Do đó $b \neq 0$.

Chia hai vế của đẳng thức trên cho b^2, ta có:

$$24\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 14.\frac{a}{b} - 24 = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = -\frac{4}{3} \text{ hoặc } \frac{a}{b} = \frac{3}{4}.$$

- Với $\frac{a}{b} = -\frac{4}{3}$ thì ta chọn a = 4, b = −3 và có tiếp tuyến $4x - 3y + C = 0$

  Sử dụng điều kiện tiếp xúc ta tìm được $C = 0$ và $C = -50$.

- Với $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ thì ta chọn a = 3, b = 4 và có tiếp tuyến $3x + 4y + C = 0$

  Sử dụng điều kiện tiếp xúc ta tìm được c = 25, C = −25.

Vậy có tất cả 4 tiếp tuyến thoả mãn yêu cầu bài toán là

$4x - 3y = 0$, $4x - 3y - 50 = 0$, $3x + 4y - 25 = 0$, $3x + 4y + 25 = 0$.

Bài 37. Cho đường thẳng $d : x - y - 4 = 0$ và hai đường tròn

$(C_1) : x^2 + y^2 = 4$ và $(C_2) : x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0$.

Viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc (C_2) tiếp xúc với d và cắt (C_1) tại hai điểm A, B sao cho AB vuông góc với d.

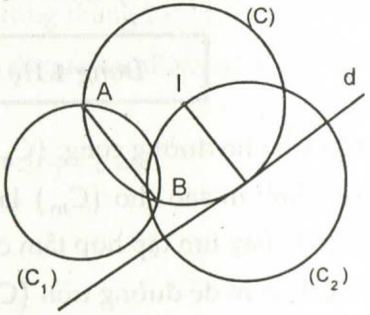
(Trích đề thi TSĐH khối B – 2012)

Giải

a) Đường tròn (C_1) có tâm là gốc tọa độ O, gọi I là tâm của đường tròn (C), ta có $AB \perp OI$. Mà $AB \perp d$ và $O \in d$ nên OI // d, do đó OI có phương trình y = x.

Mặc khác $I \in (C_2)$, nên toạ độ I thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow I(3;3)$$



Do (C) tiếp xúc d nên (C) có bán kính

$R = d(I;d) = 2\sqrt{2}$.

Vậy phương trình của (C) là

$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 8$.

Bài 38. Cho hai đường tròn

$(C_1) : x^2 + y^2 = 1$ và $(C_2) : x^2 + y^2 - 6x + 6y + 17 = 0$.

a) Xét vị trí tương đối của hai đường tròn.

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

Giải

a) Đường tròn (C_1) có tâm là gốc tọa độ O và bán kính $R_1 = 1$, đường tròn (C_2) có tâm là I(3; −3) và bán kính $R_2 = 1$.

Ta có $OI = 1 < R_1 + R_2 = 2$ nên (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi $\Delta : ax + by + c = 0$ $(a^2 + b^2 > 0)$ là tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2). Khi đó sử dụng điều kiện tiếp xúc ta có

$$\begin{cases} d(O;\Delta)=R_1 \\ d(I;\Delta)=R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1 \\ \dfrac{|3a-3b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1 \end{cases} \Rightarrow |3a-3b+c|=|c|$$

- $3a-3b+c=c \Rightarrow a=b$

  Ta chọn $a=b=1$ thì $|c|=\sqrt{2} \Leftrightarrow c=\pm\sqrt{2}$

  Ta có hai tiếp tuyến chung là $\Delta_1: x+y+\sqrt{2}=0, \Delta_2: x+y-\sqrt{2}=0$

- $3a-3b+c=-c \Rightarrow c=\dfrac{3b-3a}{2}$

  Thay c vào đẳng thức đầu tiên ta có

  $\dfrac{|3a-3b|}{2\sqrt{a^2+b^2}}=1 \Leftrightarrow 9a^2+9b^2-18ab=4a^2+4b^2 \Leftrightarrow 5a^2-18ab+5b^2=0$

  Nếu $b=0$ thì $a=0$, vô lý.

  Vậy $b \neq 0$ và ta có: $5\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-18\dfrac{a}{b}+5=0 \Leftrightarrow \dfrac{a}{b}=\dfrac{9\pm 2\sqrt{14}}{5}$

  Từ đó ta có thêm hai tiếp tuyến chung

  $\Delta_3: \left(9-2\sqrt{14}\right)x+5y-12+6\sqrt{14}=0, \Delta_4: \left(9+2\sqrt{14}\right)x+5y12-6\sqrt{14}=0$

Dạng 4. Họ đường tròn. Tập hợp điểm.

Bài 39. Cho họ đường cong: $(C_m): x^2+y^2-4mx+2my+4m^2-3m=0$

a) Xác định m sao cho (C_m) là phương trình của đường tròn. Trong trường hợp đó hãy tìm tập hợp tâm của đường tròn (C_m)

b) Xác định m để đường tròn (C_m) có bán kính bằng 1.

c) Xác định m để (C_m) là đường tròn đi qua gốc toạ độ O.

Giải.

a) Phương trình đường tròn có dạng $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$

Ta có $\begin{cases} 2a=-4m \\ 2b=2m \\ c=4m^2-3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2m \\ b=m \\ c=4m^2-3m \end{cases}$

(C_m) là đường tròn khi và chỉ khi

$a^2+b^2-c>0 \Leftrightarrow 4m^2+m^2-4m^2+3m>0 \Leftrightarrow m<-3$ hoặc $m>0$.

Gọi $I(x\,;\,y)$ là tâm của đường tròn (C_m). Khi đó $\begin{cases} x=2m \\ y=-m \end{cases} \Rightarrow y=-\dfrac{x}{2}$

Với điều kiện $m \in (-\infty;-3) \cup (0;+\infty)$ ta có $x \in \left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right) \cup (0;+\infty)$.

Vậy tập hợp tâm của họ đường tròn (C_m) là đường thẳng có phương trình

$$y=-\frac{x}{2} \text{ với } x \in \left(-\infty;-\frac{3}{2}\right) \cup (0;+\infty).$$

b) Theo câu a), với $m \in (-\infty;-3) \cup (0;+\infty)$ thì (C_m) là đường tròn có bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}=\sqrt{m^2+3m}$. Ta có

$R=\sqrt{m^2+3m}=2 \Leftrightarrow m^2+3m-4=0 \Leftrightarrow m=1$ hoặc $m=-4$ (thoả mãn).

c) (C_m) qua gốc O $\Leftrightarrow 4m^2-3m=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{3}{4}$ hoặc $m=0$ (loại).

Vậy với $m=\dfrac{3}{4}$ thì (C_m) là đường tròn đi qua gốc toạ độ O.

Bài 40. Cho họ đường cong (C_m) có phương trình:

$$x^2+y^2+4mx+2(m+1)y-1=0$$

a) Chứng minh rằng với mọi m thì (C_m) luôn là đường tròn. Xác định m để (C_m) là đường tròn có bán kính nhỏ nhất.

b) Xác định m để đường tròn (C_m) tiếp xúc với đường thẳng $2x-y+1=0$.

c) Chứng minh rằng khi m thay đổi thì (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định.

Giải.

a) Phương trình đường tròn có dạng $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$.

Ta có : $\begin{cases} 2a=4m \\ 2b=2(m+1) \\ c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2m \\ b=m+1 \\ c=-1 \end{cases}$

Như thế $a^2+b^2-c=4m^2+(m+1)^2+1=5m^2+2m+2>0, \forall m$.

Vậy (C_m) là đường tròn với mọi giá trị m.

Bán kính của đường tròn là

$$R=\sqrt{a^2+b^2-c}=\sqrt{5m^2+2m+2}=\sqrt{5\left(m+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{9}{5}}$$

Ta thấy $R \geq \dfrac{3}{\sqrt{5}}$ nên (C_m) có bán kính nhỏ nhất là $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ khi $m=-\dfrac{1}{5}$.

b) (C_m) là đường tròn có tâm $I(-2m;-m-1)$ và bán kính $R=\sqrt{5m^2+2m+2}$.

(C_m) tiếp xúc với đường $2x-y+1=0$ khi và chỉ khi $d(I,\Delta)=R$, hay

$$\frac{|2(-2m)+m+1+1|}{\sqrt{4+1}}=\sqrt{5m^2+2m+2}\Leftrightarrow|-3m+2|=\sqrt{25m^2+10m+10}$$

$$\Leftrightarrow 9m^2-12m+4=25m^2+10m+10\Leftrightarrow 16m^2+22m+6=0$$

Từ đó ta được hai giá trị là $m=-1$ và $m=-\frac{3}{13}$.

c) Gọi $M(x;y)$ là điểm cố định của (C_m). Khi đó

$$x^2+y^2+4mx+2(m+1)y-1=0,\ \forall m$$

$$\Leftrightarrow m(4x+2y)+x^2+y^2+2y-1=0,\ \forall m$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4x+2y=0\\x^2+y^2+2y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2x\\5x^2-4x-1=0\end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được 2 nghiệm là

$$(x;y)=(1;-2),\ (x;y)=\left(-\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)$$

Vậy họ (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định là $P(1;-2)$ và $Q\left(-\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)$.

C. LUYỆN TẬP

- **Phương trình đường tròn**

3.64. Hãy điền tâm và bán kính của các đường tròn vào bảng sau đây:

Phương trình	Tâm	Bán kính
a) $x^2+y^2-4x+6y-3=0$		
b) $x^2+y^2-8x=0$		
c) $x^2+y^2+4y=0$		
d) $x^2+y^2+6y-1=0$		
e) $x^2+y^2+4x+4y+5=0$		

Hướng dẫn giải

a) Tâm $I(2;-3)$, $R=4$.

b) Tâm $I(4;0)$, $R=4$.

c) Tâm $I(0;-2)$, $R=2$.

d) Tâm $I(0;-3)$, $R=\sqrt{10}$.

e) Tâm $I(-2;-2)$, $R=\sqrt{3}$.

3.65. Viết phương trình đường tròn có tâm $I(3;-4)$ trong mỗi trường hợp sau

a) Bán kính $R=3$;

b) Đi qua điểm $M(2;5)$.

Hướng dẫn giải

a) $(x-3)^2+(y+4)^2=9$.

b) $(x-3)^2+(y+4)^2=82$.

3.66. Viết phương trình đường tròn trong những trường hợp sau :

a) Nhận AB làm đường kính với $A(3;2)$, $B(-5;4)$.

b) Đi qua ba điểm $A(1;2)$, $B(5;2)$, $C(1;-3)$.

c) Đi qua hai điểm $A(3;1)$, $B(-1;3)$ và có tâm nằm trên đường thẳng

$$3x-y-2=0.$$

d) Đi qua điểm $A(-3;6)$ và tiếp xúc với đường thẳng $2x+y-4=0$ tại điểm $M(1;2)$.

Hướng dẫn giải

a) $(x+1)^2+(y-3)^2=17$

b) $x^2+y^2-6x+y-1=0$

c) $(x-2)^2+(y-4)^2=10$

d) $(x+7)^2+(y+2)^2=80$

3.67. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+2y-1=0$ và đường thẳng $d: y=x$.

a) Chứng minh rằng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B.

b) Viết phương trình đường tròn (C′) qua A, B và $M(2;3)$.

Hướng dẫn giải

a) $d: y=x=0\Leftrightarrow x-y=0$.

(C) có tâm $I(2;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{6}$.

Ta có $d(I;\Delta)=\frac{|2+1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{3}{\sqrt{5}}<\sqrt{6}=R\Rightarrow\Delta$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B.

b) (C′) qua giao điểm A, B của d và (C) nên phương trình (C′) có dạng $x^2+y^2-4x+2y-1+m(x-y)=0$.

Vì (C′) qua $M(2;3)$ nên $4+9-8+6-1+m(2-3)=0\Leftrightarrow m=10$.

Vậy phương trình của (C′) là $x^2+y^2+6x-8y-1=0$.

3.68. Cho tam giác ABC có phương trình cạnh AB, BC, CA là :

$$AB: x-y+4=0,\ BC: 3x+y-16=0,\ CA: x+2y-2=0.$$

Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Toạ độ ba đỉnh của tam giác là $A(-2;2)$, $B(3;7)$, $C(6;-2)$.

Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

$$x^2+y^2-6x-4y-12=0.$$

3.69. Cho hai điểm $A(5;1)$, $B(-3;1)$. Chứng minh rằng tập hợp những điểm M trên mặt phẳng sao cho khoảng cách từ đó đến A bằng ba lần khoảng cách từ đó đến B là một đường tròn. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó.

Hướng dẫn giải

Gọi M(x; y) là điểm thoả mãn yêu cầu bài toán.

Khi đó MA = 3MB hay $\sqrt{(5-x)^2+(1-y)^2}=3\sqrt{(-3-x)^2+(1-y)^2}$.

Bình phương hai vế và rút gọn ta được phương trình đường tròn

$$x^2+y^2+8x-2y+8=0$$

Vậy tập hợp M là đường tròn tâm I(−4;1) và bán kính R = 3.

3.70. Viết phương trình đường tròn trong những trường hợp sau :

a) Đi qua A(4; 2) và tiếp xúc với hai đường thẳng $x-3y-2=0$ và $x-3y+18=0$

b) Tiếp xúc với đường thẳng $d_1: 2x+y-3=0$ tại điểm A(1; 1) và tiếp xúc với đường thẳng $d_2: 3x-4y-2=0$ tại điểm B(−2;−2).

Hướng dẫn giải

a) Gọi I(x ; y) là tâm của đường tròn. Khi đó IA = d(I ; d₁) = d(I ; d₂)

Hay $\sqrt{(4-x)^2+(2-y)^2}=\dfrac{|x-3y+18|}{\sqrt{1+9}}=\dfrac{|x-3y-2|}{\sqrt{1+9}}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|x-3y+18|=|x-3y+2| & (1)\\ |x-3y+18|=\sqrt{10}.\sqrt{(4-x)^2+(2-y)^2} & (2)\end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta được $x-3y-2=x-3y+18$ (loại) và $x-3y-2=-x+3y-18$, suy ra $x=3y-8$.

Thay vào (2) ta được

$$\sqrt{(4-3y+8)^2+(2-y)^2}=\frac{|3y-8-3y+18|}{\sqrt{1+9}}\Leftrightarrow 9y^2-72y+144+y^2-4y+4=10$$

$$5y^2-38y+69=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\frac{23}{5}\left(x=\frac{29}{5}\right)\\ y=3(x=1)\end{array}\right.$$

- Với tâm $I\left(\frac{29}{5};\frac{23}{5}\right)\Rightarrow IA=10$

  Phương trình đường tròn là $\left(x-\frac{29}{5}\right)^2+\left(y-\frac{23}{5}\right)^2=10$

- Với tâm I(1; 3) ta có phương trình $(x-1)^2+(y-3)^2=10$.

  Nhận xét: Do d₁ // d₂ nên bán kính đường tròn là khoảng cách giữa d₁ và d₂.

b) Gọi d₃ là đường thẳng qua A và vuông góc với d₁. Phương trình của d₃ có dạng $x-2y+C=0$.

Do d₃ qua A nên $1-2.1+C=0\Rightarrow C=1$.

Vậy phương trình của d₃ là $x-2y+1=0$

Gọi d₄ là đường thẳng qua B và vuông góc với d₂. Khi đó dễ dàng tìm được phương trình của d₄ là : $4x+3y+14=0$

Gọi I là tâm của đường tròn. Khi đó I là giao điểm của d₃ và d₄.

Do đó tọa độ I là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-2y+1=0\\4x+3y+14=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{31}{11}\\ y=-\frac{10}{11}\end{cases}$

Vậy $I\left(-\frac{31}{11};-\frac{10}{11}\right)$. Từ đó bán kính $R=d(I,d_1)=\dfrac{\left|2.\frac{-31}{11}-\frac{10}{11}-3\right|}{\sqrt{4+1}}=\dfrac{105}{11\sqrt{5}}$

Phương trình đường tròn là $\left(x+\frac{31}{11}\right)^2+\left(y+\frac{10}{11}\right)^2=\frac{1205}{121}$.

3.71. Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với các trục toạ độ và :

a) Đi qua điểm M(1; 2) ;

b) Có tâm nằm trên đường thẳng $3x+y-6=0$.

Hướng dẫn giải

Đường tròn (C) tiếp xúc với hai trục toạ độ nên $R=|a|=|b|$

a) * Xét trường hợp a = b. Khi đó I(a;a)

(C) qua M(1;2) nên $IM=R=|a|\Leftrightarrow IM^2=a^2\Leftrightarrow(1-a)^2+(2-a)^2=a^2$

$\Leftrightarrow a^2-6a+5=0\Leftrightarrow a=1$ hoặc $a=5$

Với a = 1 ta có đường tròn $(x-1)^2+(y-1)^2=1$;

Với a = 5 ta có đường tròn $(x-5)^2+(y-5)^2=25$.

* Xét trường hợp $a=-b\Rightarrow I(a;-a)$

Ta có $IM=R=|a|\Leftrightarrow IM^2=a^2\Leftrightarrow(1-a)^2+(2+a)^2=a^2$

$\Leftrightarrow a^2+2a+5=0$ vô nghiệm.

b) Xét $a=b\Rightarrow I(a;a)$. Vì tâm I nằm trên d: $3x+y-6=0$

nên $3a+a-6=0\Leftrightarrow a=\frac{3}{2}$

Phương trình đường tròn là $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$.

Xét $a=-b\Rightarrow I(a;-a)$. Ta tính được a = 3 và từ đó có phương trình đường tròn là $(x-3)^2+(y+3)^2=9$.

3.72. a) Viết phương trình đường tròn có bán kính bằng 1, tiếp xúc với trục hoành và có tâm nằm trên đường thẳng $x+y-3=0$.

b) Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với đường thẳng d: x − 2y + 3 = 0 tại điểm A(1 ; 2) và có tâm nằm trên đường thẳng x + y − 1 = 0.

Hướng dẫn giải

a) $(x-2)^2+(y-1)^2=1;\ (x-4)^2+(y+1)^2=1.$

b) Gọi I là tâm của đường tròn (C).

Ta có IM vuông góc với đường thẳng x − 2y + 3 = 0 tại A(1 ; 2).

Phương trình đường thẳng IM là 2x + y − 4 = 0.

Như thế tọa độ I là nghiệm của hệ $\begin{cases}2x+y-4=0\\x+y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=-2\end{cases}$

Do đó tâm của đường tròn là I(3;−2).

Do đó bán kính của đường tròn là $R=IA=\sqrt{(1-3)^2+(2+2)^2}=\sqrt{20}.$

Phương trình đường tròn (C) là $(x+3)^2+(y+2)^2=20.$

3.73. Cho hai điểm A(1; 2), B(3; 4)

a) Viết phương trình đường tròn qua hai điểm A,B và có tâm nằm trên đường thẳng d: x + 2y − 6 = 0.

b) Viết phương trình đường tròn qua hai điểm A,B và tiếp xúc với đường thẳng Δ : x + 2y − 15 = 0.

Hướng dẫn giải

a) Gọi I là tâm của đường tròn. Vì IA = IB nên I nằm trên đường trung trực AB. Đường trung trực AB qua H(2;3) và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB}=(2;2)$ nên có phương trình là 2(x −2) + 2(y − 3)=0 hay x + y − 5 = 0.

Vậy tọa độ I là nghiệm của hệ $\begin{cases}x+2y-6=0\\x+y-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}\Rightarrow I(4;1)$

Ta lại có $R=IA=\sqrt{(1-4)^2+(2-1)^2}=\sqrt{10}$

Vậy phương trình đường tròn là (x − 4)² + (y − 1)² = 10.

b) Vì I nằm trên trung trực AB nên I(a ; 5 −a).

Theo giả thiết IA = d(I, Δ)

Hay $\sqrt{(1-a)^2+(a-3)^2}=\dfrac{|a+2(5-a)-15|}{\sqrt5}$

$\Leftrightarrow\sqrt{2a^2-8a+10}=\dfrac{|-5-a|}{\sqrt5}\Leftrightarrow a^2+10a+25=10a^2-40a+50$

$\Leftrightarrow 9a^2-50a+25=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{5}{9}\\a=5\end{array}\right.$

- $a=\dfrac59\Rightarrow I\left(\dfrac59;\dfrac{40}{9}\right),R=\dfrac{10\sqrt5}{9}$

  Phương trình đường tròn là $\left(x-\dfrac59\right)^2+\left(y-\dfrac{40}{9}\right)=\dfrac{500}{81}$

- $a=5\Rightarrow I(5;0),R=2\sqrt5$

  Phương trình đường tròn là (x− 5)² + y² = 20.

3.74. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD có một đỉnh là (1; 0) và phương trình một đường chéo là x + 3y − 11 = 0.

Hướng dẫn giải

Ta thấy đỉnh (1;0) không nằm trên đường chéo x + 3y −11 = 0 nên ta có thể xem đỉnh là A(1;0) và phương trình đường chéo BD : x + 3y − 11 = 0. Gọi I là hình chiếu của A lên BD. Khi đó I là tâm của hình vuông hay cũng là tâm của đường tròn. Dễ thấy phương trình của đường thẳng IA là 3x − y − 3 = 0.

Vậy tọa độ tâm I là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x+3y-11=0\\3x-y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}\Rightarrow I(2;3)$

Từ đó bán kính $R=IA=\sqrt{10}$ và phương trình đường tròn là

(x − 2)² + (y − 3)² = 10 .

3.75. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có trực tâm H(2; 10), cạnh BC có phương trình: x + 2y − 7 = 0. Viết phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC, biết đường tròn (C) có tâm nằm trên đường thẳng d : x − y − 3 = 0 và có bán kính bằng 5.

Hướng dẫn giải

Gọi D là điểm đối xứng của H qua BC. Dễ dàng chứng minh được D nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi M(7 − 2a; a) là giao điểm của HD và BC.

Ta $\overrightarrow{HD}=(5-2a;\ a-10)$ vuông góc với BC nên vuông góc với vectơ chỉ phương của BC.

Ta có 2(5 − 2a) − (a − 10) = 0 ⇔ 5a + 20 = 0 ⇔ a = 4

Suy ra M(−1; 4) là trung điểm HD nên dễ thấy D(−4; −2).

Vì tâm I nằm trên d: x − y − 3 = 0 nên I(a; a − 3).

Bán kính đường tròn (C) bằng 5 nên ID = 5.

Do đó: $\sqrt{(-4-a)^2+(-2-a+3)^2}=5\Leftrightarrow 2a^2+6a-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=-4\end{array}\right.$

- Với a = 1 ta có tâm I(1; −2) và phương trình (C) là (x − 1)² + (y + 2)² = 25;
- Với a = −4 ta có tâm I(−4; −7) và phương trình (C) là (x + 4)² + (y + 7)² = 25.

3.76. Viết phương trình ba đường tròn có tâm lần lượt là A(0 ; 1), B(1 ; −1), C(2 ; 0) và tiếp xúc ngoài với nhau đôi một.

Hướng dẫn giải

Ta có $AB = \sqrt{5}, BC = \sqrt{2}, CA = \sqrt{5} \Rightarrow$ tam giác ABC cân tại A.

Gọi R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính của các đường tròn tâm A, B, C. Vì các đường tròn đôi một tiếp xúc ngoài nên

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = AB = \sqrt{5} \\ R_2 + R_3 = BC = \sqrt{2} \\ R_3 + R_1 = CA = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_1 = \dfrac{2\sqrt{5} - \sqrt{2}}{2} \\ R_2 = R_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Từ đó phương trình ba đường tròn tâm A, B, C lần lượt là

$$x^2 + (y-1)^2 = \frac{(2\sqrt{5} - \sqrt{2})^2}{4}, (x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{2}, (x-2)^2 + y^2 == \frac{1}{2}.$$

3.77. Cho hai đường thẳng d: x + y − 3 = 0 và d′: 3x + 4y − 6 = 0. Lập phương trình đường tròn có bán kính R = 2 , tâm I nằm trên d và cắt d′ tại hai điểm A và B sao cho $\widehat{AIB} = 120^0$.

Hướng dẫn giải

Hạ IH ⊥d. Khi đó ΔAIH vuông tại H, có góc 60^0 và IA = 2 nên IH = 1.

Vì I nằm trên d nên I(a; 3 − a).

Từ đó: $IH = 1 = \dfrac{|3a + 4(3-a) - 6|}{\sqrt{9+16}} \Leftrightarrow |6 - a| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 11 \end{array}\right.$

Vậy có hai đường tròn thoả mãn YCBT là :

(C_1): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ và (C_2): $(x - 11)^2 + (y + 8)^2 = 4$

- **Vị trí tương đối của hai đường tròn, của đường thẳng và đường tròn**

3.78. Điền vào bảng sau đây vị trí tương đối giữa đường thẳng với đường tròn.

Đường tròn	*Đường thẳng*	*Vị trí tương đối*
$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$	$2x + y + 6 = 0$	
$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$	$3x - 2y + 10 = 0$	
$(x-2)^2 + y^2 = 4$	$x = t, y = -2$	
$x^2 + y^2 + 3x - 5y + 2 = 0$	$\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-7}{5}$	

Hướng dẫn giải

Đường tròn	*Đường thẳng*	*Vị trí tương đối*
$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$	$2x + y + 6 = 0$	Không cắt nhau
$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$	$3x - 2y + 10 = 0$	Không cắt nhau
$(x-2)^2 + y^2 = 4$	$x = t, y = -2$	Tiếp xúc
$x^2 + y^2 + 3x - 5y + 2 = 0$	$\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-7}{5}$	Tiếp xúc

3.79. Điền vào bảng sau đây vị trí tương đối giữa hai đường tròn.

Đường tròn (C_1)	*Đường tròn (C_2)*	*Vị trí tương đối*
$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$	$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$	
$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$	$x^2 + y^2 - 12x - 12y + 36 = 0$	
$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$	$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 16 = 0$	
$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$	$x^2 + y^2 - x - 5y + 4 = 0$	

Hướng dẫn giải

Đường tròn (C_1)	*Đường tròn (C_2)*	*Vị trí tương đối*
$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$	$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$	Cắt nhau
$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$	$x^2 + y^2 - 12x - 12y + 36 = 0$	Không cắt nhau
$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$	$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 16 = 0$	Tiếp xúc ngoài
$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$	$x^2 + y^2 - x - 5y + 4 = 0$	Tiếp xúc trong

3.80. Tìm toạ độ giao điểm (nếu có) của đường thẳng và đường tròn :

a) $x + y - 2 = 0, x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$;

b) $\begin{cases} x = t \\ y = 5 - 2t \end{cases}$ và $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) Tọa độ giao điểm của đường thẳng và đường tròn là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-y)^2 + y^2 - 2(2-y) + 6y - 6 = 0 \\ x = 2 - y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 2y - 3 = 0 \\ x = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$$

Vậy d và (C) cắt nhau tại hai điểm A(1;1), B(5;−3).

b) Hai giao điểm $\left(\frac{3}{5};\frac{19}{5}\right),(5;-5)$.

3.81. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ và điểm $M(-1;-3)$.

a) Viết phương trình đường thẳng Δ qua M, cắt (C) tại hai điểm A và B sao cho M là trung điểm đoạn AB.

b) Viết phương trình đường thẳng d qua M, cắt (C) tại hai điểm A và B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất (I là tâm đường tròn (C)).

Hướng dẫn giải

a) Dễ thấy đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=3$.

Ta có M là trung điểm AB nên $IM\perp AB$, hay đường thẳng Δ nhận $\overrightarrow{IM}=(-2;-1)$ làm vectơ pháp tuyến .

Do đó phương trình của Δ là $-2(x+1)-1(y+3)=0$ hay $-2x-y-5=0$

b) Gọi φ là góc giữa hai bán kính IA ,IB .

Ta có $S_{IAB}=\frac{1}{2}IA.IB\sin\varphi=\frac{9}{2}\sin\varphi$

Như thế S_{IAB} lớn nhất ⇔ sinφ lớn nhất

$\Leftrightarrow \sin\varphi=1\Leftrightarrow\varphi=90^0\Leftrightarrow IH=R\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Vậy d là đường thẳng qua M và cách tâm I của đường tròn (C) một khoảng là $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Phương trình đường thẳng d qua M có dạng $a(x+1)+b(y+3)=0$ với $a^2+b^2>0$.

Hay $d: ax+by+a+3b=0$.

Ta có: $d(I,d)=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\frac{|a-2b+a+3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 2|2a+b|=3\sqrt{2a^2+2b^2}$

Hay: $4(4a^2+4ab+b^2)=18a^2+18b^2\Leftrightarrow 2a^2-16ab+14b^2=0$

- Nếu $a=0$ thì $b=0$ (vô lí)
- Xét $a\neq 0$. Khi đó: $\left(\frac{a}{b}\right)^2-8.\frac{a}{b}+7=0\Leftrightarrow\frac{a}{b}=1$ hoặc $\frac{a}{b}=7$

Với $\frac{a}{b}=1$ ta chọn $a=b=1$ và có $d: x+y+4=0$

Với $\frac{a}{b}=7$ ta chọn $a=7$, $b=1$ và có $d: 7x+y+10=0$

Kết luận: Có hai đường thẳng thoả mãn yêu cầu bài toán là:

$d_1: x+y+4=0$ và $d_2: 7x+y+10=0$.

3.82. Cho hai đường tròn:

$(C_1): (x+2)^2+(y-2)^2=2$ và $(C_2): (x-3)^2+(y-2)^2=1$.

a) Chứng minh rằng (C₁) và (C₂) nằm ngoài nhau.

b) Cho $M(1;2)$. Hãy tìm trên (C₁) điểm A, trên (C₂) điểm B sao cho M là trung điểm đoạn AB.

Hướng dẫn giải

a) (C₁) có tâm $I_1(-2;2)$, bán kính $R_1=\sqrt{2}$; (C₂) có tâm $I_1(3;2)$, bán kính $R_2=1$

Ta có $I_1I_2=5>R_1+R_2$ nên (C₁) và (C₂) nằm ngoài nhau .

b) Ta có: $A(a;b)\in(C_1)\Leftrightarrow(a+2)^2+(b-2)^2=2\Leftrightarrow a^2+b^2+4a-4b+6=0$.

Vì B đối xứng với A qua M nên $\begin{cases}x_B=2x_M-a=2-a\\ y_B=2y_M-b=4-b\end{cases}\Rightarrow B(2-a;4-b)$

Vì $B\in(C_2)$ nên $(2-a-3)^2+(4-b-2)^2=1\Leftrightarrow a^2+b^2+2a-4b+4=0$

Do đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases}a^2+b^2+4a-4b+6=0\\ a^2+b^2+2a-4b+4=0\end{cases}$

Ta có

$$\begin{cases}a^2+b^2+4a-4b+6=0\\ a^2+b^2+2a-4b+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2+4a-4b+6=0\\ 2a+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2-4b+3=0\\ a=-1\end{cases}$$

Từ đó ta có 2 nghiệm $a=-1, b=1$ và $a=-1, b=3$.

Từ đó hai bộ điểm thoả mãn yêu cầu bài tóan là

$A(-1;1)\in(C_1)$, $B(3;3)\in(C_2)$ và $A(-1;3)\in(C_1)$, $B(3;1)\in(C_2)$.

- **Tiếp tuyến của đường tròn**

3.83. Đường tròn $(x-3)^2+(y+1)^2=10$ tiếp xúc với đường thẳng nào trong các đường thẳng sau đây ?

a) $2x+y-3=0$　　b) $x+3y+10=0$

c) $x=3+\sqrt{10}$　　d) $x+3y-10=0$

e) $y-4=0$　　g) $3x-y-20=0$

Hướng dẫn giải

Điều kiện cần và đủ để một đường tròn tiếp xúc với đường thẳng là khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng đúng bằng bán kính đường tròn.

Từ đó đường tròn đã cho tiếp xúc với các đường thẳng :

$x+3y+10=0, x+3y-10=0, x=3+\sqrt{10}, 3x-y-20=0$

3.84. Cho đường tròn $x^2+y^2+6x-4y+5=0$.

a) Chứng minh rằng điểm $M(-1;4)$ nằm trên đường tròn. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn đó tại M.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn đó tại giao điểm của đường tròn với trục hoành.

Hướng dẫn giải

a) Thay tọa độ M vào phương trình đường tròn ta thấy thoả mãn. Vậy điểm M nằm trên đường tròn. Tiếp tuyến tại M nhận $\overrightarrow{IM} = (2;2)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là: $2(x + 1) + 2(y - 4) = 0$ hay $x + y - 3 = 0$.

b) Từ phương trình đường tròn, cho $y = 0$, ta được:

$$x^2 + 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = -5.$$

Vậy đường tròn cắt với trục hoành tại hai điểm $(-1;0)$ và $(-5;0)$. Phương trình tiếp tuyến tại các giao điểm đó là $x - y + 1 - 0, x + y + 5 = 0$.

3.85. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0$.

a) Lập phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $3x - 4y + 2 = 0$.

b) Lập phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $3x - 4y + 6 = 0$.

c) Lập phương trình tiếp tuyến của (C) biết rằng tiếp tuyến này đi qua điểm $A(2; 6)$.

Hướng dẫn giải

Đường tròn (C) có tâm $I(-2;-2)$ và bán kính $R = 5$.

a) Vì biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $3x - 4y + 2 = 0$ nên phương trình tiếp tuyến có dạng $3x - 4y + C = 0$ $(C \neq 2)$.

Sử dụng điều kiện tiếp xúc, ta có

$$\frac{|-6 + 8 + C|}{\sqrt{9 + 16}} = 5 \Leftrightarrow |C + 2| = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C = 23 \\ C = -27 \end{array}\right.$$

Vậy có hai tiếp tuyến là $3x - 4y + 23 = 0; 3x - 4y - 27 = 0$.

b) Vì biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $3x - 4y + 6 = 0$ nên phương trình tiếp tuyến có dạng $4x + 3y + C = 0$.

Sử dụng điều kiện tiếp xúc, ta có:

$$\frac{|-8 - 6 + C|}{\sqrt{9 + 16}} = 5 \Leftrightarrow |C - 14| = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C = -11 \\ C = 39 \end{array}\right.$$

Vậy có hai tiếp tuyến là: $4x + 3y + 39 = 0; 4x + 3y - 11 = 0$.

c) Do tiếp tuyến qua $A(6; 17)$ nên phương trình tiếp tuyến có dạng

$a(x - 6) + b(y - 17) = 0$ hay $ax + by - 6a - 17b = 0$ $(a^2 + b^2 > 0)$.

Lại sử dụng điều kiện tiếp xúc: $\dfrac{|-2a - 2b - 6a - 17b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 5 \Leftrightarrow |-8a - 19b| = 5\sqrt{a^2 + b^2}$

$$\Leftrightarrow 64a^2 + 361b^2 + 304ab = 25a^2 + 25b^2 \Leftrightarrow 39a^2 + 304ab + 336b^2 = 0 \ (*)$$

Nếu $b = 0$ thì $a = 0$, vô lí. Do đó $b \neq 0$. Từ đó

$$(*) \Leftrightarrow 9\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 24\frac{a}{b} + 16 = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = -\frac{4}{3} \text{ hoặc } \frac{a}{b} = -\frac{81}{13}$$

- Với $\dfrac{a}{b} = -\dfrac{4}{3}$ ta chọn $a = 4, b = -3$ và có phương trình tiếp tuyến là

$$4x - 3y + 27 = 0.$$

- Với $\dfrac{a}{b} = -\dfrac{81}{13}$ ta chọn $a = 81, b = -13$ và có phương trình tiếp tuyến

$$81x - 13y - 265 = 0.$$

3.86. a) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$, biết tiếp tuyến tạo với hai tia Ox, Oy một tam giác vuông cân.

b) Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến này tạo với đường thẳng $2x + y - 6 = 0$ một góc 45^0.

Hướng dẫn giải

a) Cho tiếp tuyến Δ cắt tia Ox và tia Oy lần lượt tại $A(a;0)$ và $B(0;b)$ với $a, b > 0$.

Khi đó phương trình Δ là $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1 \Leftrightarrow bx + ay - ab = 0$.

(C) có tâm là $I(1 ; 2)$, bán kính $R = 2$.

Δ tiếp xúc (C) khi và chỉ khi

$$d(I ; \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|b + 2a - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2 \Leftrightarrow |b + 2a - ab| = 2\sqrt{a^2 + b^2}$$

Vì tam giác OAB vuông cân nên $a = b$.

Như thế hệ thức trên trở thành

$$|3a - a^2| = 2\sqrt{2a^2} \Leftrightarrow 9a^2 - 6a^3 + a^4 = 8a^2 \Leftrightarrow a^2(a^2 - 6a + 1) = 0$$

Ta có hai nghiệm dương $a = 3 \pm 2\sqrt{2}$.

Vậy có hai tiếp tuyến thoả mãn yêu cầu bài toán là

$$\Delta_1 : x + y = 3 - 2\sqrt{2} \text{ và } \Delta_2 : x + y = 3 + 2\sqrt{2}.$$

b) Đường tròn có tâm $I(-2;1)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

Giả sử phương trình tiếp tuyến $\Delta : ax + by + c = 0$ với $a^2 + b^2 > 0$

Do tiếp tuyến tạo với đường thẳng $2x + y - 6 = 0$ nên

$$\frac{|2a + b|}{\sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{4 + 1}} = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 4(4a^2 + 4ab + b^2) = 10a^2 + 10b^2$$

Hay $3a^2 + 8ab - 3b^2 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{3}$ hoặc $\dfrac{a}{b} = -3$.

- Xét $\frac{a}{b} = -3$: Chọn $a = 3, b = -1$ ta có, phương trình $3x - y + c = 0$

  Theo điều kiện tiếp xúc thì: $\frac{|3(-2) - 1 + c|}{\sqrt{9+1}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |c - 7| = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow c = \pm 5\sqrt{2} + 7$

  Ta có hai tiếp tuyến $3x - y \pm 5\sqrt{2} + 7 = 0$

- Xét $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$. Ta được hai tiếp tuyến $x + 3y \pm 5\sqrt{2} - 1 = 0$.

3.87. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ và đường thẳng Δ: $x + y + 2 = 0$. Gọi I là tâm của (C), M là điểm thuộc Δ. Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) (A, B là các tiếp điểm). Tìm toạ độ M, biết tứ giác MAIB có diện tích bằng 10.

(Trích đề thi TSĐH khối A – 2011)

Hướng dẫn giải

Đường tròn (C) có tâm I(2;1) và bán kính $IA = R = \sqrt{5}$.

Tứ giác MAIB có $\widehat{MAI} = \widehat{MBI} = 90^0$ và MA = MB

$\Rightarrow S_{MAIB} = IA.MA \Rightarrow MA = 2\sqrt{5} \Rightarrow IM = \sqrt{IA^2 + MA^2} = 5$

$M \in \Delta$, có toạ độ $M(t; -t - 2)$. Do đó

$IM = 5 \Leftrightarrow (t - 2)^2 + (t + 3)^2 = 25 \Leftrightarrow 2t^2 + 2t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ hoặc $t = -3$.

Vậy M(2; −4) hoặc M(−3; 1).

3.88. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x + y - \frac{3}{4} = 0$ và đường thẳng d có phương trình $kx - 2y + k - 1 = 0$, với k là tham số.

a) Xác định k để d tiếp xúc với đường tròn.

b) Xác định k để d cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt và tiếp tuyến của đường tròn tại hai điểm đó tạo với nhau một góc 60^0.

Hướng dẫn giải

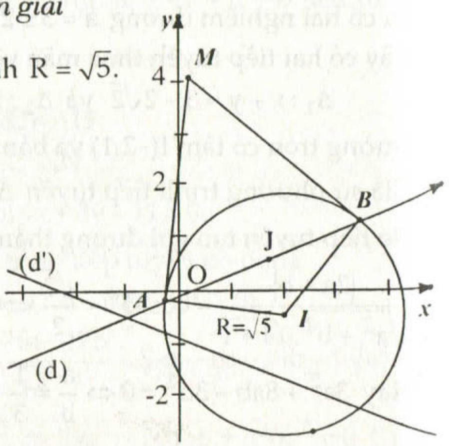
Đường tròn có tâm $I\left(2; -\frac{1}{2}\right)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

a) d tiếp xúc với đường tròn khi và chỉ khi

$$d(I;d) = R \Leftrightarrow \frac{\left|k.2 - 2.\left(\frac{-1}{2}\right) + k - 1\right|}{\sqrt{k^2 + 4}} = \sqrt{5}$$

$\Leftrightarrow |3k| = \sqrt{5k^2 + 20} \Leftrightarrow 9k^2 = 5k^2 + 20$

$\Leftrightarrow k^2 = 5 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{5}$



b) Gọi A, B là giao điểm của d với đường tròn và I là trung điểm AB.

Hai tiếp tuyến của đường tròn tại A và B cắt nhau tại M.

Tam giác MAB đều nên $\widehat{AOB} = 120^0$ và $OI = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2}$

Vậy d thoả mãn yêu cầu bài toán ⇔ khoảng cách từ tâm O của đường trò đến d là $\frac{R}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ hay $\frac{|3k|}{\sqrt{k^2 + 4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 36k^2 = 5k^2 + 20 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{\frac{20}{31}}$.

3.89. Cho đường thẳng Δ: x − 2y −1 = 0 và điểm M(0; 2). Viết phương trình đường tròn (C) qua M, tiếp xúc với Δ và có bán kính nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi I là tâm và R là bán kính của đường tròn (C) qua M và tiếp xúc với Δ tại H. Gọi K là hình chiếu của M lên Δ. Ta có 2R = IM + IH ≥ MH ≥ MK. Từ đó, $\min R = \frac{MK}{2} \Leftrightarrow H \equiv K$ và do đó đường tròn thoả mãn yêu cầu bài toán là đường tròn đường kính MK.

Đường thẳng MK qua M(0; 2) và vuông góc với Δ nên có phương trình $2x + y - 2 = 0$. Vậy tọa độ K là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow K(1;0) \Rightarrow I\left(\frac{1}{2};1\right), R = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Với I là tâm đường tròn. Vậy phương trình đường tròn cần tìm là

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{5}{4}.$$

3.90. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$ và đường thẳng Δ : $x + my - 2m + 3 = 0$. Gọi I là tâm của đường tròn (C). Tìm m để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất.

(Trích đề thi TSĐH khối A – 2009)

Hướng dẫn giải

(C) có tâm I(−2;2), bán kính $R = \sqrt{2}$.

Ta có $S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA.IB \sin\widehat{AIB} = \frac{1}{2} R^2 \sin\widehat{AIB} \le \frac{1}{2} R^2 = 1$

Do đó S đạt giá trị lớn nhất bằng 1 ⇔ IA ⊥ IB.

Từ đó, $d(I;\Delta) = \frac{IA}{\sqrt{2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{|1 - 4m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1$

$\Leftrightarrow (1 - 4m)^2 = 1 + m^2 \Leftrightarrow m = \frac{8}{5}$ hoặc $m = 0$.

3.91. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn

$(C_1): x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$, $(C_2): x^2 + y^2 - 8x + 10y + 40 = 0$.

Hướng dẫn giải

(C₁) có tâm $I_1(3;2)$ và bán kính $R_1 = 2$, (C₁) có tâm $I_1(4;-5)$ và bán kính $R_1 = 1$.

Gọi $\Delta : ax + by + c = 0\ (a^2 + b^2 > 0)$ là phương trình tiếp tuyến chung.

Khi đó: $\begin{cases} d(I_1,\Delta) = R_1 \\ d(I_2,\Delta) = R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|3a+2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2 \\ \dfrac{|4a-5b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{|3a+2b+c|}{|4a-5b+c|} = 2$

Hay $|3a+2b+c| = 2|4a-5b+c| \Rightarrow 3a+2b+c = \pm 2(4a-5b+c)$

Từ đó $3a+2b+c = 2(4a-5b+c)$ hoặc $3a+2b+c = -2(4a-5b+c)$

Suy ra $c = -5a+12b$ hoặc $c = \dfrac{-11a+10b}{3}$

- Xét trường hợp $c = -5a+12b$.

Ta có: $|3a+2b+c| = 2\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow |3a+2b-5a+12b| = 2\sqrt{a^2+b^2}$

Hay $|-2a+14b| = 2\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 4a^2 - 56ab + 196b^2 = 4a^2 + 4b^2$

$\Leftrightarrow 192b^2 - 56ab = 0 \Leftrightarrow 8b(24b-7a) = 0 \Leftrightarrow b = 0$ hoặc $7a = 24b$.

Với $b = 0$ thì $a \neq 0$, ta chọn $a = 1$ và từ đó $c = -5$.

Phương trình tiếp tuyến chung $\Delta_1 : x - 5 = 0$

Với $7a = 24b$ ta chọn $a = 24,\ b = 7$, từ đó $c = -36$.

Phương trình tiếp tuyến chung $\Delta_2 : 24x + 7y - 36 = 0$.

- Xét trường hợp $c = \dfrac{-11a+10b}{3}$

Ta có $|3a+2b+c| = 2\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow \left|3a+2b+\dfrac{-11a+10b}{3}\right| = 2\sqrt{a^2+b^2}$

Hay $|-2a+16b| = 6\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 4a^2 - 64ab + 256b^2 = 36a^2 + 36b^2$

$\Leftrightarrow 32a^2 - 64ab - 220b^2 = 0 \Leftrightarrow 8a^2 - 16ab - 55b^2 = 0$ (*)

Nếu $b = 0$ thì $a = 0$ (mâu thuẫn). Do đó $b \neq 0$, khi đó ta có

$(*) \Leftrightarrow 8\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 - 16\dfrac{a}{b} - 55 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{4-3\sqrt{14}}{4}$ hoặc $\dfrac{a}{b} = \dfrac{4+3\sqrt{14}}{4}$

* Với $\dfrac{a}{b} = \dfrac{4-3\sqrt{14}}{4}$ ta chọn $a = 4-3\sqrt{14},\ b = 4$. Khi đó $c = -4+33\sqrt{14}$

Ta có tiếp tuyến chung $\Delta_3 : \left(4-3\sqrt{14}\right)x + 4y - 4 + 33\sqrt{14} = 0$.

* Với $\dfrac{a}{b} = \dfrac{4+3\sqrt{14}}{4}$ ta chọn $a = 4+3\sqrt{14},\ b = 4$. Khi đó $c = -4-33\sqrt{14}$

Ta có tiếp tuyến chung $\Delta_4 : \left(4+3\sqrt{14}\right)x + 4y - 4 - 33\sqrt{14} = 0$.

Vậy ta có 4 tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

- **Họ đường tròn**

3.92. Cho phương trình $x^2 + y^2 - 2mx - 4(2m-1)y + 5 = 0$ (1)

a) Xác định m sao cho (1) là phương trình của một đường tròn (C). Tìm tập hợp tâm của các đường tròn (C).

b) Tìm m để (C) cắt trục hoành tại hai điểm A, B mà AB = 4.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $a = -m,\ b = -4m+2,\ c = 5$

Phương trình (1) là phương trình của đường tròn (C)

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 > c \Leftrightarrow m^2 + (4m-2)^2 > 5 \Leftrightarrow 17m^2 - 16m - 1 > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{-1}{17}$ hoặc $m > 1$

Gọi $I(x;y)$ là tâm của đường tròn. Khi đó $\begin{cases} x = m \\ y = 4m-2 \end{cases} \Rightarrow y = 4x - 2$.

Vậy tập hợp tâm I là đường thẳng $y = 4x - 2$ với $x < \dfrac{-1}{17}$ hoặc $x > 1$.

b) Cho $y = 0$, ta có phương trình $x^2 - 2mx + 5 = 0$.

Để đường tròn (C) cắt trục hoành tại hai điểm A, B thì phương trình trên phải có 2 nghiệm phân biệt hay $\Delta' = m^2 - 5 > 0$

Khi đó theo định lí Vi–et ta có $\begin{cases} x_A + x_B = 2m \\ x_A.x_B = 5 \end{cases}$

Từ đó $AB = |x_A - x_B| = \sqrt{(x_A + x_B)^2 - 4x_A x_B} = \sqrt{4m^2 - 20}$

Theo giả thiết $AB = 4 \Leftrightarrow \sqrt{4m^2 - 20} = 4 \Leftrightarrow 4m^2 = 36 \Leftrightarrow m = \pm 3$ (thoả mãn).

Vậy giá trị m thoả mãn yêu cầu bài toán là $m = \pm 3$.

3.93. Cho đường cong (Cₘ): $x^2 + y^2 + (m+3)x - (m+2)y + m - 13 = 0$

a) Chứng minh rằng (Cₘ) luôn là đường tròn với mọi giá trị của m .

b) Tìm tập hợp tâm của (Cₘ) khi m thay đổi.

c) Chứng minh rằng khi m thay đổi thì (Cₘ) luôn đi qua hai điểm cố định.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $a^2 + b^2 - c = 2\left(m + \dfrac{9}{4}\right)^2 + \dfrac{127}{8} > 0\ \forall m \Rightarrow$ (Cₘ) luôn là đường tròn với mọi m.

b) Tập hợp tâm là đường thẳng $2x+2y+1=0$.

c) (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định là $A(2;3), B\left(-\frac{7}{2};-\frac{5}{2}\right)$.

3.94. Cho đường cong (C_m) : $x^2+y^2-2(m+2)x+4my+19m-6=0$.

a) Tìm m để (C_m) là đường tròn có bán kính bằng 10.

b) Tìm m để (C_m) là đường tròn có tâm cách đều hai trục tọa độ.

c) Tìm m để (C_m) là đường tròn tiếp xúc với đường thẳng $3x+y-19=0$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $a^2+b^2-c=(m+2)^2+4m^2-19m+6=5m^2-15m+10$

(C_m) là đường tròn có bán kính là 10

$\Leftrightarrow \sqrt{5m^2-15m+10}=10 \Leftrightarrow 5m^2-15m+10=100$

$\Leftrightarrow m^2-3m-18=0 \Leftrightarrow m=6$ hoặc $m=-3$.

b) Điều kiện để (C_m) là đường tròn là: $5m^2-15m+10>0 \Leftrightarrow m<1$ hoặc $m>2$

Tâm của (C_m) là I(m+2; –2m). Tâm I cách đều hai trục tọa độ khi và chỉ khi :

$$|m+2|=|-2m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+2=2m \\ m+2=-2m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Ta chỉ nhận giá trị $m=-\frac{2}{3}$.

c) Với $5m^2-15m+10>0 \Leftrightarrow m<1$ hoặc $m>2$ thì (C_m) là đường tròn có tâm I(m+2; –2m) và bán kính $R=\sqrt{5m^2-15m+10}$.

(C_m) tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x+y-19=0 \Leftrightarrow d(I;\Delta)=R$

$$\Leftrightarrow \frac{|3(m+2)-2m-19|}{\sqrt{9+1}}=\sqrt{5m^2-15m+10} \Leftrightarrow |m-13|=\sqrt{10(5m^2-15m+10)}$$

$\Leftrightarrow m^2-26m+169=50m^2-150m+100 \Leftrightarrow 49m^2-124m-69=0$

$\Leftrightarrow m=3$ hoặc $m=-\frac{23}{49}$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy giá trị m thoả mãn yêu cầu bài toán là $m\in\left\{3;-\frac{23}{49}\right\}$.

3.95. Cho họ (C_m) : $x^2+y^2-2x-2my+m^2-24=0$ có tâm I và đường thẳng Δ: $mx+4y=0$.

a) Chứng minh rằng với mọi m , (C_m) luôn là đường tròn chắn trên trục Oy một dây cung có độ dài không đổi.

b) Tìm m sao cho (C_m) chắn trên hai trục Ox, Oy các dây cung có độ dài bằng nhau.

c) Chứng minh rằng với mọi m , Δ luôn cắt (C_m) tại hai điểm phân biệt M và N. Tìm m sao cho diện tích tam giác IMN bằng 12.

Hướng dẫn giải

a) So sánh phương trình (C_m) với $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$, ta được

$a=-1$, $b=-m$, $c=m^2-24$.

Ta có $a^2+b^2-c=1+m^2-m^2+24=25>0$ với mọi m.

Do đó với mọi m, (C_m) luôn là đường tròn có tâm I(1;m) và bán kính

$R=\sqrt{a^2+b^2-c}=\sqrt{25}=5$

Cho x = 0 ta được phương trình $x^2-2my+m^2-24=0$ có hai nghiệm là $x=m\pm2\sqrt{6}$.

Vậy (C_m) luôn cắt Oy tại hai điểm $C\left(0;m-2\sqrt{6}\right), D\left(0;m+2\sqrt{6}\right)$

Ta có $CD=4\sqrt{6}$ (không đổi).

b) Cho y = 0, ta có $x^2-2x+m^2-24=0$ $(-5<m<5)$ có hai nghiệm $x=1\pm\sqrt{25-m^2} \Rightarrow A\left(1-\sqrt{25-m^2},0\right), B\left(1+\sqrt{25-m^2},0\right) \Rightarrow AB=2\sqrt{25-m^2}$

Từ giả thiết ta có AB = CD hay $2\sqrt{25-m^2}=4\sqrt{6} \Leftrightarrow 25-m^2=24 \Leftrightarrow m=\pm1$

Nhận xét : Có thể giải như sau, vì AB = CD nên tâm I cách đều hai trục tọa độ. Từ đó : $|m|=1 \Leftrightarrow m=\pm1$

c) Với m = 0 thì điều phải chứng minh là rõ ràng.

Với $m\neq0$ thì khoảng cách từ tâm I của (C_m) đến Δ là

$$d(I,\Delta)=\frac{|m.1+4.m|}{\sqrt{16+m^2}}=\frac{5|m|}{\sqrt{16+m^2}}<\frac{5|m|}{\sqrt{m^2}}=5=R$$

Suy ra Δ luôn cắt (Cm) tại hai điểm phân biệt M, N. Gọi H là trung điểm MN. Khi đó $IH\perp MN$ và $IH=d(I,\Delta)=\frac{5|m|}{\sqrt{16+m^2}}$

Lại có $MH=\sqrt{IM^2-IH^2}=\sqrt{25-\frac{25m^2}{m^2+16}}=\frac{20}{\sqrt{m^2+16}}$. Do đó

$$S_{IMN}=\frac{1}{2}MN.IH=\frac{1}{2}.\frac{40}{\sqrt{m^2+16}}.\frac{5|m|}{\sqrt{16+m^2}}=12 \Leftrightarrow 12(16+m^2)=100|m|$$

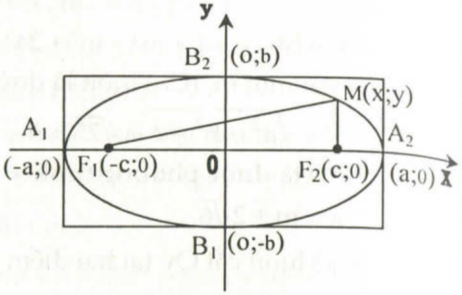
- Với m > 0, ta có $3m^2-25m+48=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=\dfrac{16}{3} \end{array}\right.$
- Với m < 0, ta có $3m^2+25m+48=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=-\dfrac{16}{3} \end{array}\right.$

Vậy những giá trị m cần tìm là $m\in\left\{3;\frac{16}{3};-3;-\frac{16}{3}\right\}$.

§4. ĐƯỜNG ELIP

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa elip



Cho hai điểm cố định F_1 và F_2 với $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$. Elip là tập hợp các điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$ trong đó a là hằng số, $a > c$.

2. Phương trình chính tắc của elip (E)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1); \text{ với } a > b > 0,\ c^2 = a^2 - b^2.$$

3. Hình dạng của elip (E)

Cho Elip (E) có phương trình chính tắc (1). Ta có :

+ (E) có tiêu điểm $F_1(-c; 0)$ và $F_2(c; 0)$; tiêu cự 2c.

+ (E) có 4 đỉnh: $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0;-b)$ và $B_2(0; b)$, độ dài trục lớn 2a, độ dài trục bé 2b.

+ $M(x; y) \in (E) \Leftrightarrow MF_1 = a + \frac{c}{a}x$ và $MF_2 = a - \frac{c}{a}x$.

(MF₁ và MF₂ gọi là các bán kính qua tiêu).

+ (E) có tâm sai $e = \frac{c}{a}$.

- *Phép co.* Phép biến đổi trên mặt phẳng Oxy biến điểm M(x; y) thành điểm M′(x′; y′) thoả mãn phương trình $\begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases}$ $(0 < k < 1)$ được gọi là *phép co về trục Ox* với hệ số co là k.

(Tương tự ta cũng có định nghĩa cho phép co về trục Oy với hệ số co k, phương trình của phép co về trục Oy là $\begin{cases} x' = kx \\ y' = y \end{cases}$ với $0 < k < 1$).

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 1. Định nghĩa elip - Xác định các yếu tố của elip.

Bài 41. Cho tam giác ABC vuông tại C. Gọi (E_1) là elip nhận A, B làm tiêu điểm và đi qua C, (E_2) là elip nhận B, C làm tiêu điểm và đi qua A, (E_3) là elip nhận C, A làm tiêu điểm và đi qua B.

Chứng minh rằng ba elip (E_1), (E_2), (E_3) cùng đi qua một điểm.

Giải

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật ACBD.

Ta có: $DA + DB = CB + CA$, suy ra (E_1) qua C và D;

$DB + DC = AC + AB$, suy ra (E_2) qua A và D;

$DC + DA = BA + BC$, suy ra (E_3) qua C và D.

Vậy ba elip trên có chung nhau điểm D.

Bài 42. Tìm toạ độ các tiêu điểm, các đỉnh, độ dài trục lớn, độ dài trục bé, tiêu cự và tâm sai của mỗi elip có phương trình sau:

a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; b) $4x^2 + 9y^2 = 36$; c) $4x^2 + 16y^2 = 4$.

Giải.

a) Elip $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Do đó ta có $\begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases}$. Suy ra $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$. Vậy elip có :

- Hai tiêu điểm là $F_1(-4 ; 0)$ và $F_2(4 ; 0)$;
- Toạ độ các đỉnh là $A_1(-5 ; 0)$, $A_2(5 ; 0)$, $B_1(0 ; -3)$ và $B_2(0 ; 3)$;
- Độ dài trục lớn là $2a = 10$, độ dài trục bé là $2b = 6$.
- Tiêu cự $2c = 8$, tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.

b) Đưa phương trình elip $4x^2 + 9y^2 = 36$ về dạng chính tắc:

$$4x^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Ta có: $\begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$. Do đó $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$. Vậy elip có:

- Hai tiêu điểm là $F_1(\sqrt{5} ; 0)$ và $F_2(-\sqrt{5} ; 0)$;
- Toạ độ các đỉnh là $A_1(-3 ; 0)$, $A_2(3 ; 0)$, $B_1(0; -2)$, $B_2(0; 2)$;
- Độ dài trục lớn là $2a = 6$, độ dài trục bé là $2b = 4$.
- Tiêu cự $2c = 2\sqrt{5}$, tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

c) Viết lại phương trình elip thành dạng chính tắc: $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{0,25}=1$.

Tương tự câu b), ta có $a = 1$, $b = 0,5 = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Vậy elip có :

- Hai tiêu điểm là $F_1(-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$ và $F_2(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$;
- Toạ độ các đỉnh là $A_1(-1; 0)$, $A_2(1; 0)$, $B_1(0; -0{,}5)$, $B_2(0; 0{,}5)$,
- Độ dài trục lớn là $2a = 2$, độ dài trục bé là $2b = 1$.
- Tiêu cự $2c = \sqrt{3}$, tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Dạng 2. Viết phương trình chính tắc của elip

Bài 43. Lập phương trình chính tắc của elip, biết :

a) Một tiêu điểm là $F_1(-3;0)$ và tâm sai $e = \frac{3}{4}$;

b) Elip đi qua điểm $M\left(\sqrt{2}; -\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)$ và $F_1M + F_2M = 2\sqrt{5}$;

c) Elip đi qua hai điểm (2; 2) và (3; 1).

Giải.

Phương trình chính tắc của elip có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b > 0$.

a) Ta có $F_1(-3;0) \Rightarrow c = 3$.

Mặt khác do $e = \frac{3}{4} = \frac{c}{a}$ nên $a = 4$. Như thế $b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 9 = 7$.

Vậy phương trình chính tắc của elip là $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.

b) Ta có $F_1M + F_2M = 2a \Rightarrow 2a = 2\sqrt{5} \Rightarrow a = \sqrt{5}$

Vì elip qua điểm M nên $\frac{2}{5} + \frac{4.\frac{15}{25}}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 4$

Vậy phương trình chính tắc của elip là $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$.

c) Vì elip qua hai điểm (2; 2) và (3; 1) nên

$$\begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \\ \frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2} = \frac{3}{32} \\ \frac{1}{b^2} = \frac{5}{32} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{32}{3} \\ b^2 = \frac{32}{5} \end{cases}$$

Từ đó phương trình của elip là $3x^2 + 5y^2 = 32$.

Vậy phương trình chính tắc của elip là $\frac{x^2}{\frac{32}{3}} + \frac{y^2}{\frac{32}{5}} = 1$.

Bài 44 Lập phương trình chính tắc của elip trong mỗi trường hợp sau đây :

a) Tâm sai $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở là 10;

b) Độ dài trục lớn là 15, elip đi qua điểm M mà $\widehat{F_1MF_2} = 90^0$ và diện tích tam giác MF_1F_2 là 26.

Giải

Phương trình chính tắc của elip có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b > 0$.

a) Từ giả thiết ta có $a^2 + b^2 = 10$, $e^2 = \frac{8}{9} = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow a^2 = 9b^2$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a^2 + b^2 = 10 \\ a^2 = 9b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 1 \end{cases}$

Vậy phương trình elip là $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$.

b) Ta có $2a = 15 \Rightarrow a = \frac{15}{2}$;

$$MF_1 + MF_2 = 2a = 15.$$

Mặt khác do diện tích tam giác MF_1F_2 là 26 nên

$$\frac{MF_1.MF_2}{2} = 26 \Rightarrow MF_1.MF_2 = 52$$

Ta có: $F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 = (MF_1 + MF_2)^2 - 2MF_1.MF_2 = 225 - 194 = 121$

Từ đó $2c = F_1F_2 = 11 \Rightarrow c = \frac{11}{2}$. Như thế: $b^2 = a^2 - b^2 = \frac{225}{4} - \frac{121}{4} = 26$

Vậy phương trình chính tắc của elip là $\frac{x^2}{\frac{225}{4}} + \frac{y^2}{26} = 1$.

Dạng 3. Tìm điểm trên elip thoả mãn điều kiện cho trước.

Bài 45. Cho elip (E) : $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{4} = 1$. Tìm điểm M nằm trên elip sao cho

a) $MF_1 = 2MF_2$;

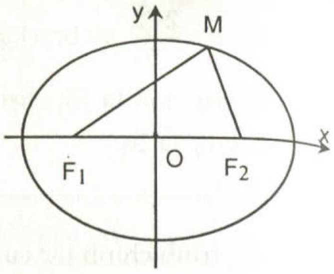
b) M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 60⁰.

Giải

Ta có $a^2 = 7$, $b^2 = 4 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 3$.

Suy ra $a = \sqrt{7}, b = 2, c = \sqrt{3}$.

a) Giả sử: $M(x;y)\in(E)\Rightarrow\begin{cases}MF_1=a+\dfrac{c}{a}x\\ MF_2=a-\dfrac{c}{a}x\end{cases}$



Như thế $MF_1=2MF_2\Leftrightarrow a+\dfrac{c}{a}x=2\left(a-\dfrac{c}{a}x\right)$

$$\Leftrightarrow\frac{3c}{a}x=a\Leftrightarrow x=\frac{a^2}{3c}=\frac{7}{3\sqrt{3}}$$

Thay hoành độ của M vào phương trình elip có

$$\frac{7}{27}+\frac{y^2}{4}=1\Rightarrow\frac{y^2}{4}=\frac{20}{27}\Rightarrow y^2=\frac{80}{27}\Rightarrow y=\pm\frac{4\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}.$$

Vậy có hai điểm thoả mãn yêu cầu bài toán là

$M_1\left(\dfrac{7}{3\sqrt{3}};-\dfrac{4\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}\right)$ và $M_2\left(\dfrac{7}{3\sqrt{3}};\dfrac{4\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}\right)$.

b) Giả sử M(x ; y) thoả mãn yêu cầu bài toán.

Vì M nằm trên (E) nên $\dfrac{x^2}{7}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

Áp dụng định lí côsin cho tam giác MF_1F_2, ta có:

$$F_1F_2^{\,2}=MF_1^{\,2}+MF_2^{\,2}-2MF_1.MF_2\cos60^0=MF_1^{\,2}+MF_2^{\,2}-MF_1.MF_2$$

Hay có thể viết

$$F_1F_2^{\,2}=(MF_1+MF_2)^2-3MF_1.MF_2$$

$$\Rightarrow 3MF_1.MF_2=(MF_1+MF_2)^2-F_1F_2^{\,2}=4a^2-4c^2=4b^2=16$$

Sử dụng công thức tính bán kính qua tiêu ta có

$$\frac{16}{3}=MF_1.MF_2=\left(a+\frac{c}{a}x\right)\left(a-\frac{c}{a}x\right)=a^2-\frac{c^2}{a^2}x^2\Rightarrow\frac{c^2}{a^2}x^2=a^2-\frac{16}{3}=\frac{5}{3}$$

Từ đó ta có $x^2=\dfrac{5a^2}{3c^2}=\dfrac{35}{9}$. Như thế $y^2=4\left(1-\dfrac{x^2}{7}\right)=4\left(1-\dfrac{5}{9}\right)=\dfrac{16}{9}$

Từ đó ta có 4 điểm M thoả mãn yêu cầu bài toán là $\left(\pm\dfrac{\sqrt{35}}{3};\dfrac{4}{3}\right),\left(\pm\dfrac{\sqrt{35}}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$.

Bài 46. Cho elip (E): $9x^2+16y^2=144$ và đường thẳng d: $2x+y+5=0$. Cho đường thẳng d′ qua tiêu điểm bên trái F_1 của (E), d′ // d và d′ cắt (E) tại M và N. Tính MF_2+NF_2.

Giải

Đường thẳng d′ // d: $2x+y+5=0$ và d′ qua $F_1(-\sqrt{7};0)$

nên d′ có phương trình $2(x+\sqrt{7})+1(y-0)=0\Rightarrow d':y=-2x-2\sqrt{7}$.

Hoành độ giao điểm của d′ và (E) là nghiệm của phương trình :

$$9x^2+16(-2x-2\sqrt{7})^2=144\Leftrightarrow 73x^2+128\sqrt{7}x+304=0.\quad(*)$$

Ta có: $MF_2+NF_2=a-\dfrac{c}{a}x_M+a-\dfrac{c}{a}x_N$

$$=2a-\frac{c}{a}(x_M+x_N)=8-\frac{\sqrt{7}}{4}\left(\frac{-128\sqrt{7}}{73}\right)=\frac{808}{73}.$$

(x_M, x_N là hai nghiệm của phương trình (*) nên $x_M+x_N=\dfrac{-128\sqrt{7}}{73}$).

Bài 47. Cho elip (E) : $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ và đường thẳng d: $x-y\sqrt{2}+2=0$.

a) Chứng minh rằng d luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt A và B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

b) Tìm tọa độ điểm C trên (E) sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Giải

a) Tọa độ giao điểm của d và (E) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1\\ x-y\sqrt{2}+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2+8y^2-32=0\\ x=y\sqrt{2}-2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4(y\sqrt{2}-2)^2+8y^2-32=0\\ x=y\sqrt{2}-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2-\sqrt{2}y-1=0\\ x=y\sqrt{2}-2\end{cases}$$

Phương trình $y^2-\sqrt{2}y-1=0$ (*) có hai nghiệm phân biệt nên d và (E) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Khi đó y_A, y_B là nghiệm (*). Do đó

$$y_A+y_B=\sqrt{2},\ y_A.y_B=-1$$

Ta có $A\left(\sqrt{2}y_A-1;y_A\right),B\left(\sqrt{2}y_B-1;y_B\right)$

Từ đó $AB=\sqrt{\left(\sqrt{2}y_B-\sqrt{2}y_A\right)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{3(y_B-y_A)^2}$

$$=\sqrt{3\left[(y_B+y_A)^2-4y_Ay_B\right]}=\sqrt{3(2+4)}=3\sqrt{2}$$

b) Giả sử C(x;y) nằm trên (E). Khi đó $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$

Khoảng cách từ C đến AB là: $CH=\dfrac{\left|x-y\sqrt{2}+2\right|}{\sqrt{1+2}}=\dfrac{\left|x-y\sqrt{2}+2\right|}{\sqrt{3}}$

Đặt $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\sin t \\ y = 2\cos t \end{cases} (0 \le t \le 2\pi)$ (*)

Khi đó $x - y\sqrt{2} + 2 = 2\sqrt{2}\sin t - 2\sqrt{2}\cos t + 2 = 2\sqrt{2}(\sin t - \cos t) + 2$

Ta có: $-\sqrt{2} \le \sin t - \cos t \le \sqrt{2} \Rightarrow -4 \le 2\sqrt{2}(\sin t - \cos t) \le 4$

$\Rightarrow -2 \le 2\sqrt{2}(\sin t - \cos) + 2 \le 6$

Từ đó ta được: $\left|x - y\sqrt{2} + 2\right| = \left|2\sqrt{2}(\sin t - \cos t) + 2\right| \le 6$

Vậy tam giác ABC có diện tích lớn nhất là $\max S = \frac{1}{2}\frac{6}{\sqrt{3}}.3\sqrt{2} = 3\sqrt{6}$ khi $\sin t - \cos t = \sqrt{2}$. Ta có thể chọn $t = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow C\left(2; -\sqrt{2}\right)$.

Bài 48. Tìm hai điểm M, N trên elip (E) : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{13} = 1$ sao cho tam giác F_1MN là tam giác đều (F_1 là tiêu điểm bên trái của elip).

Giải

Viết phương trình elip dưới dạng $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{13} = 1$.

Ta có $a^2 = 16, b^2 = 13 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 3$.

Do đó elip có hai tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{3};0)$ và $F_2(\sqrt{3};0)$

a) ΔF_1MN đều nên $F_1M = F_1N \Rightarrow a + \frac{c}{a}x_M = a + \frac{c}{a}x_N \Rightarrow x_M = x_N$.

Như thế M, N đối xứng nhau qua trục hoành. Ta có thể xem $y_M > 0 > y_N$.

Gọi H là giao điểm của MN với Ox.

Ta có F_1H là đường cao của tam giác đều cạnh $F_1M = a + \frac{c}{a}x_M$ nên

$$F_1H = F_1M.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(a + \frac{c}{a}x_M\right)$$

Mặt khác $F_1H = x_M - (-c) = x_M + c$

Thành thử $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(a + \frac{c}{a}x_M\right) = x_M + c \Leftrightarrow \left(1 - \frac{c\sqrt{3}}{2a}\right)x_M = \frac{a\sqrt{3}}{2} - c$

Hay $\frac{5}{8}x_M = \sqrt{3} \Leftrightarrow x_M = \frac{8\sqrt{3}}{5}$

Từ đó ta tính được $y_M = \frac{13}{5}$.

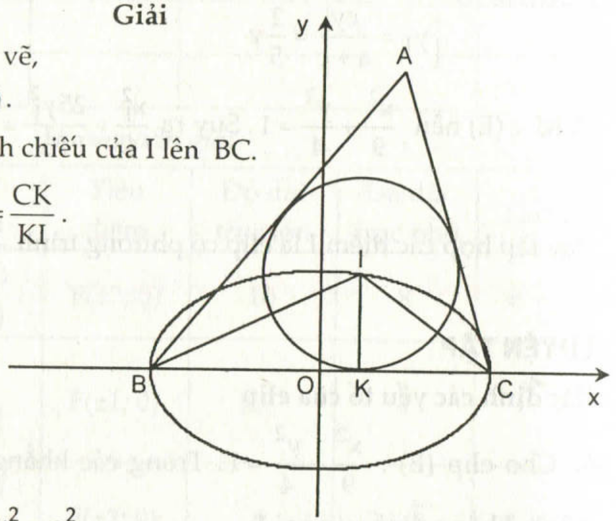
Vậy hai điểm M, N thoả mãn yêu cầu bài toán là $M\left(\frac{8\sqrt{3}}{5}; \frac{13}{5}\right), N\left(\frac{8\sqrt{3}}{5}; -\frac{13}{5}\right)$.

Dạng 4. Tập hợp điểm là elip.

- *Sử dụng định nghĩa elip*
- *Trong một số trường hợp cần phải chọn hệ trục tọa độ thích hợp.*

Bài 49. Cho tam giác ABC có B, C cố định. Điểm A thay đổi thoả mãn điều kiện $\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} = 3$. Tìm tập hợp tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Giải



Chọn hệ toạ độ như hình vẽ, sao cho $B(-a\,;0)$, $C(a\,;0)$.

Cho $I(x\,;y)$, gọi K là hình chiếu của I lên BC.

Ta có $\cot\frac{B}{2} = \frac{BK}{KI}$, $\cot\frac{C}{2} = \frac{CK}{KI}$.

Từ đó : $\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} = 3$

$\Leftrightarrow \frac{CK.BK}{KI^2} = 3$

$\Leftrightarrow \frac{(a-x).(a+x)}{y^2} = 3$

$\Leftrightarrow a^2 - x^2 = 3y^2 \Leftrightarrow 3y^2 + x^2 = a^2$.

Vậy tập hợp tâm I là elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{a^2}{3}} = 1$.

Bài 50.* Cho elip (E) : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$. M là một điểm thay đổi trên elip. Tìm tập hợp tâm đường tròn nội tiếp tam giác MF_1F_2 với F_1, F_2 là hai tiêu điểm của elip.

Giải.

Ta có $a^2 = 9, b^2 = 5 \Rightarrow c^2 = 4 \Rightarrow F_1(-2;0), F_2(2;0)$.

Vì M nằm trên elip (E) nên $MF_1 + MF_2 = 2a = 6$.

Giả sử đường tròn nội tiếp tam giác MF_1F_2 tiếp xúc với F_1F_2 tại H.

Nửa chu vi của tam giác MF_1F_2 là $a + c = 5$.

Ta có $F_1H = a + c - MF_2 = \frac{MF_1 - MF_2}{2} + c$

Từ đó ta có $OH = F_1H - c = \frac{MF_1 - MF_2}{2} = \frac{MF_1^2 - MF_2^2}{4a}$

Từ $MF_1 = a + \frac{c}{a}x, MF_2 = a - \frac{c}{a}x \Rightarrow MF_1^2 - MF_2^2 = \frac{4cx}{a} \Rightarrow OH = \frac{cx}{a}$

Gọi $r = IH$ là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác MF_1F_2. Ta có

$$r = \frac{S_{\Delta MF_1F_2}}{p} = \frac{c|y|}{a+c}$$

Do đó ta có $\begin{cases} x_I = \frac{c}{a}x = \frac{2}{3}x \\ y_I = \frac{cy}{a+c} = \frac{2}{5}y \end{cases}$

Vì $M \in (E)$ nên $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Suy ra $\frac{x_I^2}{4} + \frac{25y_I^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{x_I^2}{4} + \frac{y_I^2}{\frac{16}{25}} = 1.$

Vậy tập hợp các điểm I là elip có phương trình $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{16}{25}} = 1.$

C. LUYỆN TẬP

- **Xác định các yếu tố của elip**

3.96. Cho elip (E) : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

a) Độ dài trục lớn là 9, độ dài trục nhỏ là 4.

b) Một tiêu điểm là $(-\sqrt{5};0)$.

c) Tiêu cự là 10.

d) Hai kích thước hình chữ nhật cơ sở là 6 và 4 .

Hướng dẫn giải

Khẳng định a), d) sai. Khẳng định b), c) đúng.

3.97. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai ?

a) Nếu elip (E) có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ thì $0 < a < b$.

b) Tiêu điểm của elip nằm trên trục lớn.

c) Elip $3x^2 + 4y^2 = 12$ có một tiêu điểm là $F(-1 ; 0)$.

d) Tâm sai của elip là tỉ số giữa độ dài trục nhỏ và độ dài trục lớn.

Hướng dẫn giải

Mệnh đề a) d) sai. Mệnh đề b) c) đúng.

3.98. Hãy điền vào bảng sau đây các yếu tố của elip

Elip	Đỉnh	Tiêu điểm	Độ dài trục lớn	Độ dài trục nhỏ	Tâm sai
$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$					
$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$					
$5x^2 + 9y^2 - 45 = 0$					
$x^2 + 3y^2 = 6$					

Hướng dẫn giải

Elip	Đỉnh	Tiêu điểm	Độ dài trục lớn	Độ dài trục nhỏ	Tâm sai
$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$	$A(\pm 5; 0)$ $B(0; \pm 4)$	$F(\pm 3; 0)$	10	8	$e = \frac{3}{5}$
$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$	$(\pm\sqrt{5};0)$ $B(0; \pm 2)$	$F(\pm 1; 0)$	$2\sqrt{5}$	4	$e = \frac{1}{\sqrt{5}}$
$5x^2 + 9y^2 - 45 = 0$	$A(\pm 3; 0)$ $(0 ; \pm\sqrt{5})$	$F(\pm 2; 0)$	6	$2\sqrt{5}$	$e = \frac{2}{3}$
$x^2 + 3y^2 = 6$	$(\pm\sqrt{6} ; 0)$ $(0 ; \pm\sqrt{2})$	$F(\pm 2; 0)$	$2\sqrt{6}$	$2\sqrt{2}$	$e = \frac{2}{\sqrt{6}}$

3.99. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai ?

a) Nếu hai elip có độ dài trục lớn bằng nhau thì tiêu cự của chúng bằng nhau.

b) Nếu hai elip có tiêu cự và độ dài trục nhỏ bằng nhau thì tâm sai của chúng cũng bằng nhau.

c) Nếu hai elip có 4 đỉnh trùng nhau thì hai elip đó trùng nhau.

d) Nếu hai elip có tiêu điểm trùng nhau thì tâm sai của chúng bằng nhau.

Hướng dẫn giải

a) và d) sai ; b) và c) đúng.

3.100. Tính tâm sai của elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ trong mỗi trường hợp sau đây

a) Độ dài trục lớn gấp 3 lần độ dài trục nhỏ.

b) Đỉnh trên trục nhỏ nhìn hai đỉnh trên trục lớn dưới một góc 120^0.

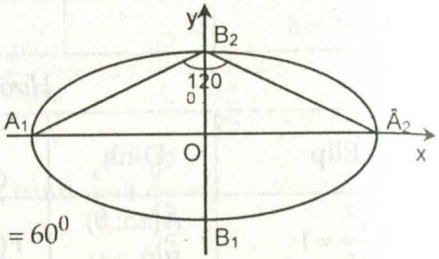
c) Khoảng cách giữa hai tiêu điểm bằng nửa khoảng cách giữa hai đỉnh trên trục lớn.

Hướng dẫn giải

Trước hết ta có $c^2 = a^2 - b^2$ và tâm sai $e = \dfrac{c}{a}$

a) Ta có $2a = 3.2b \Rightarrow b = \dfrac{a}{3} \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{9} = \dfrac{8a^2}{9} \Rightarrow \dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{8}{9}$

Từ đó ta có tâm sai của elip $e = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.



b) Đỉnh trên trục nhỏ là $B_2(0;b)$

hai đỉnh trên trục lớn là $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$.

Theo giả thiết: $\widehat{A_1B_2A_2} = 120^0 \Rightarrow \widehat{OB_2A_2} = 60^0$

Như thế : $OA_2 = OB_2\sqrt{3} \Rightarrow a = b\sqrt{3} \Rightarrow b^2 = \dfrac{a^2}{3}$

Từ đó $c^2 = a^2 - b^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{2a^2}{3} \Rightarrow \dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow e = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

c) Từ giả thiết có $2c = \dfrac{1}{2}.2a \Rightarrow \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow e = \dfrac{1}{2}$.

- **Lập phương trình chính tắc của elip**

3.101. Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của elip

a) $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{\sqrt{10}} = 1$ b) $\dfrac{2x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ c) $\dfrac{x^2}{7} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ d) $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

Hướng dẫn giải

Phương trình chính tắc của elip có dạng $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$

Từ đó chỉ có phương trình ở câu c) là phương trình chính tắc elip.

3.102. Viết phương trình chính tắc của đường elip (E) trong mỗi trường hợp sau:

a) (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và tiêu cự bằng 4 ;

b) (E) có tâm sai bằng $\dfrac{2}{3}$ và tiêu điểm $F_1(-4 ; 0)$;

c) (E) có tiêu điểm $F_2(2\sqrt{3} ; 0)$ và đi qua điểm $M(2;-\sqrt{3})$;

d) (E) có độ dài trục bé bằng 6 và tâm sai bằng $\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

a) (E) có độ dài trục lớn $2a = 8$, nên $a = 4$.

Do tiêu cự $2c = 4$, suy ra $c = 2$. Ta có $b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12$.

Vậy phương trình chính tắc của (E) là $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$.

b) Theo giả thiết $e = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{3}$ (1). Vì (E) có tiêu điểm $F_1(-4;0)$

Suy ra $c = 4$, do đó từ (1), ta có $a = \dfrac{3c}{2} = 6$. Suy ra $b^2 = a^2 - c^2 = 20$.

Vậy phương trình chính tắc của elip là $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{20} = 1$.

c) (E) có tiêu điểm $F_2(2\sqrt{3} ; 0)$, suy ra $c = 2\sqrt{3}$.

Giả sử elip có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Theo đề bài, điểm $M(2;-\sqrt{3})$ nằm trên elip nên:

$\dfrac{4}{a^2} + \dfrac{3}{b^2} = 1$ hay $4b^2 + 3a^2 = a^2b^2$.

Vì $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 12$ suy ra $4b^2 + 3(b^2 + 12) = (b^2 + 12)b^2$

hay $b^4 + 5b^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow b^2 = 4$ hoặc $b^2 = -9$ ($b^2 = -9$ loại).

$b^2 = 4 \Rightarrow a^2 = 16$. Vậy phương trình chính tắc của elip là $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

d) Theo giả thiết (E) có độ dài trục bé $2b = 6 \Rightarrow b = 3$.

(E) có tâm sai $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a = 2c$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \\ a = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 9 + c^2 \\ a = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4c^2 = 9 + c^2 \\ a^2 = 4c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2 = 3 \\ a^2 = 12 \end{cases}.$$

Vậy phương trình chính tắc của elip là $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

3.103. Viết phương trình chính tắc của elip trong những trường hợp sau:

a) Khoảng cách giữa hai tiêu điểm là 6, tâm sai $e = \dfrac{1}{3}$.

b) Elip đi qua điểm $M\left(\dfrac{3\sqrt{14}}{4};-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$, tam giác MF_1F_2 vuông tại M.

c) Đỉnh trên trục lớn là $(-5; 0)$ và phương trình đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở là $x^2 + y^2 = 34$.

d) Tâm sai $e = \frac{2}{\sqrt{7}}$ và hình chữ nhật cơ sở có diện tích là $4\sqrt{21}$.

Hướng dẫn giải

a) $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{72} = 1$ b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$ c) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ d) $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$

3.104. Cho elip (E) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. Lập phương trình chính tắc của elip (E′) trong mỗi trường hợp sau đây :

a) (E′) có tiêu điểm trùng tiêu điểm của (E) và có độ dài trục lớn là 6.

b) (E′) có đỉnh trên trục lớn trùng với đỉnh trên trục lớn của (E) và đồng thời đi qua điểm $\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

c) (E′) có đỉnh trên trục nhỏ trùng với đỉnh trên trục nhỏ của (E) và đồng thời có tiêu cự gấp đôi tiêu cự của (E).

d) (E′) có tâm sai bằng tâm sai của (E) và độ dài đường chéo của hình chữ nhật cơ sở là $2\sqrt{14}$.

Hướng dẫn giải

a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ c) $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$ d) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1$

3.105. Cho elip (E) có tâm đối xứng là gốc tọa độ O, hai tiêu điểm F_1, F_2 nằm trên trục hoành. M là một điểm nằm trên elip với $MF_1 + MF_2 = 8$. Biết chu vi hình chữ nhật cơ sở là 20. Lập phương trình chính tắc của elip .

Hướng dẫn giải

Ta có $MF_1 + MF_2 = 2a = 8 \Rightarrow a = 4$.

Chu vi hình chữ nhật cơ sở là $4a + 4b = 20$, suy ra $b = 1$

Phương trình chính tắc cử elip là $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1$.

- **Tìm điểm trên elip thoả mãn điều kiện cho trước**

3.106. Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$. $M(x_0; y_0)$ thuộc (E).

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

a) $MF_1 + MF_2 = 2b$ b) $x_0 \le -a$ hoặc $x_0 \ge a$

c) $-b \le y_0 \le b_0$ d) $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$

Hướng dẫn giải

a) và b) sai ; c) và d) đúng.

3.107. Cho elip (E) : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.

a) Tìm điểm M trên elip (E) sao cho $2MF_1 = 3MF_2$

b) Tìm điểm M trên elip (E) sao cho $\frac{1}{MF_1} + \frac{1}{MF_2} = \frac{6}{F_1F_2}$.

c) Tìm điểm M nằm trên elip (E) sao cho $MF_1^3 + MF_2^3 = 182$.

Hướng dẫn giải

Xét elip (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

Ta có $a^2 = 16, b^2 = 7 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 9$. Vậy $a = 4$, $b = \sqrt{7}$, $c = 3$

a) Gọi $M(x; y) \in (E) \Rightarrow MF_1 = a + \frac{c}{a}x, MF_2 = a - \frac{c}{a}x$. Ta có

$$2MF_1 = 3MF_3 \Leftrightarrow 2\left(a + \frac{c}{a}x\right) = 3\left(a - \frac{c}{a}x\right) \Leftrightarrow \frac{5c}{a}x = a \Leftrightarrow x = \frac{a^2}{5c} = \frac{16}{15}$$

Từ đó ta tính được $y^2 = 7\left(1 - \frac{x^2}{16}\right) = 7\left(1 - \frac{256}{16.225}\right) = 7.\frac{209}{225} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{1463}}{15}$

Vậy có hai điểm thoả mãn yêu cầu bài toán là $\left(\frac{16}{15}; \pm\frac{\sqrt{1463}}{15}\right)$

b) Gọi $M(x; y) \in (E) \Rightarrow MF_1 = a + \frac{c}{a}x$, $MF_2 = a - \frac{c}{a}x$

Ta có $\frac{1}{MF_1} + \frac{1}{MF_2} = \frac{6}{F_1F_2} \Leftrightarrow \frac{MF_1 + MF_2}{MF_1.MF_2} = \frac{6}{F_1F_2} \Leftrightarrow \frac{2a}{MF_1.MF_2} = \frac{6}{2c}$

$$\Leftrightarrow MF_1.MF_2 = \frac{2ac}{3} = \frac{2.4.3}{3} = 8 \Leftrightarrow a^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2}x^2 = a^2 - 8 = 8 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8a^2}{c^2} = \frac{128}{9} \Leftrightarrow x = \pm\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

Từ đó ta tính được $y^2 = \frac{7}{9} \Leftrightarrow y = \frac{\pm\sqrt{7}}{3}$

Vậy có 4 điểm thoả mãn yêu cầu bài toán $\left(\pm\frac{8\sqrt{2}}{3}; \frac{\pm\sqrt{7}}{3}\right)$

c) Ta có $MF_1^3 + MF_2^3 = 182 \Leftrightarrow (MF_1 + MF_2)(MF_1^2 - MF_1MF_2 + MF_2^2 = 182$

$$\Leftrightarrow 2a\left[(MF_1 + MF_2)^2 - 3MF_1MF_2\right] = 182 \Leftrightarrow 4a^2 - 3MF_1MF_2 = \frac{91}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3MF_1MF_2 = 64 - \frac{91}{4} = \frac{165}{4} \Leftrightarrow \left(a + \frac{c}{a}x\right)\left(a - \frac{c}{a}\right)x = \frac{55}{4} \Leftrightarrow a^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 = \frac{55}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2}x^2 = a^2 - \frac{55}{4} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{9a^2}{4c^2} = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Từ đó ta có 4 điểm thoả mãn yêu cần bài toán là $\left(\pm 2; \frac{\pm\sqrt{21}}{2}\right)$.

3.108. Cho elip (E) : $x^2 + 4y^2 = 16$.

a) Tìm N thuộc (E) nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

b) Tìm M thuộc (E) nhìn hai tiêu điểm dưới một góc bằng 60^0.

Hướng dẫn giải

a) (E) có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. Suy ra $a^2 = 16$ và $b^2 = 4$.

Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 12 \Rightarrow c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Cho N(x; y). N nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông khi và chỉ khi N thuộc đường tròn tâm O bán kính $R = c = \sqrt{12}$. Khi đó tọa độ N thoả mãn phương trình đường tròn (O; $\sqrt{12}$) : $x^2 + y^2 = 12$.

Do đó tọa độ N là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 12 \\ 4x^2 + 16y^2 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{32}{3} \\ y^2 = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{32}{3}} \\ y^2 = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} \end{cases}.$$

Vậy có 4 điểm thoả mãn đề bài: $\left(\sqrt{\frac{32}{3}}; \sqrt{\frac{4}{3}}\right), \left(\sqrt{\frac{32}{3}}; -\sqrt{\frac{4}{3}}\right), \left(-\sqrt{\frac{32}{3}}; \sqrt{\frac{4}{3}}\right), \left(-\sqrt{\frac{32}{3}}; -\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$.

b) Cho $M(x; y) \in (E)$. Ta có $MF_1 = 4 + \frac{\sqrt{3}}{2}x$, $MF_2 = 4 - \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

Vì ΔF_1MF_2 có $\widehat{F_1MF_2} = 60^0$ nên theo định lí côsin, ta có:

$F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1.MF_2\cos 60^0 \Leftrightarrow 48 = 16 + \frac{9}{4}x^2$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{32}}{3}$. Vì $M \in (E)$ nên $x = \pm\frac{2\sqrt{32}}{3} \Rightarrow y = \pm\frac{2}{3}$.

Vậy có 4 điểm thoả mãn đề bài:

$$\left(\frac{2\sqrt{32}}{3}; \frac{2}{3}\right), \left(-\frac{2\sqrt{32}}{3}; \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2\sqrt{32}}{3}; -\frac{2}{3}\right), \left(-\frac{2\sqrt{32}}{3}; -\frac{2}{3}\right).$$

3.109. Cho elip (E): $4x^2 + 9y^2 = 36$. Lập phương trình đường thẳng Δ qua điểm M(1; 1) và cắt (E) tại hai điểm A và B sao cho MA = MB.

Hướng dẫn giải

Cách 1. Vì $M(1; 1) \notin Ox$ mà (E) nhận Ox làm trục đối xứng nên đường thẳng Δ cần tìm không thể song song Oy.

Do đó phương trình Δ qua M có dạng $y = k(x - 1) + 1$.

Hoành độ giao điểm của Δ và (E) là nghiệm của phương trình

$4x^2 + 9[k(x - 1) + 1]^2 = 36 \Leftrightarrow (4 + 9k^2)x^2 + 18k(1 - k)x + 9k^2 - 18k - 27 = 0$ (1).

Δ cắt (E) tại hai điểm A, B có hoành độ là các nghiệm x_1 và x_2 của phương trình (1). Do đó :

$$MA = MB \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 + x_2 = 2x_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 81k^2(1-k)^2 - (4+9k^2)(9k^2 - 18k - 27) > 0 \\ -\frac{18k(1-k)}{4+9k^2} = 2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow k = -\frac{4}{9}$. Vậy phương trình đường thẳng Δ cần tìm là

$$y = -\frac{4}{9}(x - 1) + 1 \text{ hay } 4x + 9y - 13 = 0.$$

Cách 2. Áp dụng tính chất trung điểm dây cung.

Cho A(x; y) và B(x′; y′) thuộc (E) và đối xứng nhau qua M, ta có

$$\begin{cases} x + x' = 2 \\ y + y' = 2 \end{cases} \Rightarrow B(2-x; 2-y).$$

Ta có A(x; y) và B(2–x; 2–y) thuộc (E) nên ta có:

$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ 4(2 - x)^2 + 9(2 - y)^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 & (1) \\ 4x^2 + 9y^2 - 16x - 36y + 16 = 0 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta suy được phương trình Δ là $4x + 9y - 13 = 0$.

3.110. Cho elip (E) : $16x^2 + 25y^2 = 400$.

a) Một điểm M nằm trên (E) mà $MF_1 = 3$. Tính MF_2 và tọa độ M.

b) AB là một dây cung thay đổi đi qua tiêu điểm F_1 và không đi qua tiêu điểm F_2 của (E). Chứng minh rằng chu vi tam giác ABF_2 không đổi.

Hướng dẫn giải

a) Ta có a = 5, b = 4, c = 3

Vì M trên (E) nên $MF_1 + MF_2 = 2a = 10 \Rightarrow MF_2 = 10 - MF_1 = 10 - 3 = 7$.

Mặt khác $MF_1 = a + \frac{c}{a}x_M = 5 + \frac{3}{5}x_M \Rightarrow x_M = -\frac{10}{3}$

Từ đó $y_M^2 = 16\left(1 - \frac{x_M^2}{25}\right) = 16\left(1 - \frac{100}{225}\right) = 16.\frac{125}{225} \Rightarrow y_M = \pm\frac{4}{3}\sqrt{5}$

Vậy có hai điểm thoả mãn yêu cầu bài toán là $M\left(-\frac{10}{3}; \pm\frac{4}{3}\sqrt{5}\right)$.

b) A và B là hai điểm trên (E) nên $AF_1 + AF_2 + BF_1 + BF_2 = 2a + 2a = 4a = 20$

Chu vi của tam giác ABF_2 là: $AB + AF_2 + BF_2 = AF_1 + AF_2 + BF_1 + BF_2 = 20$

3.111*. Cho elip (E) : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$. Gọi M, N là hai điểm trên (E) sao cho tam giác OMN vuông tại O (O là gốc tọa độ). Gọi H là hình chiếu của O lên MN. Chứng minh rằng khi M, N thay đổi thì H chạy trên đường tròn tâm O cố định. Hãy lập phương trình đường tròn đó.

Hướng dẫn giải

Giả sử $\widehat{AOM} = \alpha (0 \le \alpha \le 2\pi) \Rightarrow \widehat{AON} = \alpha + \frac{\pi}{2}$

Khi đó $M(OM\cos\alpha; OM\sin\alpha), N(-ON\sin\alpha; ON\cos\alpha)$

Vì M, N đều nằm trên elip nên

$$\frac{OM^2\cos^2\alpha}{25} + \frac{OM^2\sin^2\alpha}{4} = 1, \frac{ON^2\sin^2\alpha}{25} + \frac{ON^2\cos^2\alpha}{4} = 1$$

Tam giác OMN vuông tại O, có $OH \perp MN$ nên

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{29}{100}$$

Vậy H nằm trên đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = \frac{29}{100}$.

3.112. Cho elip (E) có phương trình $8x^2 + 12y^2 - 96 = 0$.

a) Tìm hai điểm M, N trên elip sao cho tam giác F_1MN đều.

b) Xác định tọa độ 4 đỉnh của hình vuông nội tiếp trong elip (nghĩa là 4 đỉnh của hình vuông nằm trên elip).

Hướng dẫn giải

Viết phương trình elip dưới dạng: $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1 \Rightarrow a^2 = 12, b^2 = 8, c^2 = 4$

Giả sử M, N thoả mãn tam giác F_1MN đều.

Khi đó $MF_1 = NF_1$ hay: $a + \frac{c}{a}x_M = a + \frac{c}{a}x_n \Rightarrow x_M = x_N$

Suy ra M, N đối xứng nhau qua trục hoành. Giả sử M(x ; y) với y > 0. Gọi H là trung điểm MN. Khi đó tam giác F_1MH vuông tại H và có góc 60^0 nên :

$$2F_1H = MF_1\sqrt{3} \Leftrightarrow 2|x_M + c| = \left(a + \frac{c}{a}x_M\right)\sqrt{3}$$

- Xét $x_M > -c$. Ta có: $2(x_M + c) = \left(a + \frac{c}{a}x_M\right)\sqrt{3} \Leftrightarrow \left(2 - \frac{c\sqrt{3}}{a}\right)x_M = a\sqrt{3} - 2c$

Từ đó ta tính được: $\left(2 - \frac{c\sqrt{3}}{a}\right)x_M = a\sqrt{3} - 2c \Leftrightarrow \left(2 - \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)x_M = 6 - 2 \Rightarrow x_M = 4$

Ta loại trường hợp này vì $x_M > a$.

- Xét $x_M < -c$. Ta có

$$-2(x_M + c) = \left(a + \frac{c}{a}x_M\right)\sqrt{3} \Leftrightarrow \left(2 + \frac{c\sqrt{3}}{a}\right)x_M = -a\sqrt{3} - 2c$$

$$\Rightarrow 3x_M = -10 \Rightarrow x_M = -\frac{10}{3}$$

Thay vào phương trình elip, ta được

$$\frac{100}{108} + \frac{y_M^2}{8} = 1 \Rightarrow \frac{y_M^2}{8} = 1 - \frac{100}{108} = \frac{8}{108} \Rightarrow y_M^2 = \frac{16}{27}$$

Vậy có hai điểm M, N thoả mãn yêu cầu bài toán là

$$M\left(-\frac{10}{3}; \frac{4}{3\sqrt{3}}\right), N\left(-\frac{10}{3}; -\frac{4}{3\sqrt{3}}\right)$$

b) Giả sử P(x; y) là tạo độ của một đỉnh hình vuông (x, y >0).

Do hình vuông cũng như elip nhận hai trục tọa độ làm trục đối xứng nên x = y. Từ đó: $\frac{x^2}{12} + \frac{x^2}{8} = 1 \Rightarrow 20x^2 = 96 \Rightarrow x^2 = \frac{24}{5}$

Vậy có bốn đỉnh của hình vuông là $\left(\pm\sqrt{\frac{24}{5}}; \pm\sqrt{\frac{24}{5}}\right)$.

3.113. Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$. M là một điểm tùy ý trên elip.

Chứng minh rằng:

a) $F_1M.F_2M + OM^2 = a^2 + b^2$;

b) $(F_1M - F_2M)^2 = 4(OM^2 - b^2)$;

c) $\frac{MH^2}{A_1H.A_2H} = \frac{b^2}{a^2}$ với H là hình chiếu của M lên trục lớn.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $M(x; y) \Rightarrow \begin{cases} MF_1 = a + ex \\ MF_2 = a - ex \end{cases}$

Từ đó $F_1M.F_2M + OM^2 = a^2 + b^2 = (a + ex)(a - ex) + x^2 + y^2$

$$= a^2 - e^2x^2 + x^2 + y^2 = a^2 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + x^2 + y^2 = a^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = a^2 + b^2$$

b) Ta có $(F_1M - F_2M)^2 - 4OM^2 = (a + ex - a + ex)^2 - 4(x^2 + y^2)$

$$= -4(x^2 + y^2 - e^2x^2) = -4b^2\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2}\right) = -4b^2$$

c) Giả sử M(x; y). Khi đó H(x ; 0).

Ta có $\dfrac{MH^2}{HA.HA_1}=\dfrac{y^2}{(a+x)(a-x)}=\dfrac{y^2}{a^2-x^2}$

Hơn nữa $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow a^2-x^2=\dfrac{a^2y^2}{b^2}$.

Vậy $\dfrac{MH^2}{HA.HA_1}=\dfrac{y^2b^2}{a^2y^2}=\dfrac{b^2}{a^2}$.

3.114. Trong mặt phẳng Oxy cho elip (E) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$. Tìm tọa độ điểm A và B thuộc (E) có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.

(Trích đề thi TSĐH khối A –2011)

Hướng dẫn giải

Giả sử $A(x_A;y_A), B(x_B;y_B)$

Do tam giác OAB cân tại O nên $x_A = x_B$ và $y_A = - y_B$.

Từ đó $S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}AB.d(O,AB)=|x_Ay_A|$

Áp dụng BĐT Cô–si, ta có: $|x_Ay_A|=2\sqrt{\dfrac{x_A^2}{4}.y_A^4}\le\dfrac{x_A^2}{4}+\dfrac{y_A^2}{1}=1\Rightarrow S_{\Delta OAB}\le 1$.

Suy ra diện tích tam giác OAB lớn nhất là 1 khi

$$\begin{cases}\dfrac{x_A^2}{4}+\dfrac{y_A^2}{1}=1\\ \dfrac{x_A^2}{4}=y_A^2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_A=\sqrt{2},y_A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ x_{|A}=\sqrt{2},y_A=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$$

Vậy $A\left(\sqrt{2};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),B\left(\sqrt{2};-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ hoặc $A\left(\sqrt{2};-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),B\left(\sqrt{2};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

3.115. Cho đường tròn (C) $x^2+y^2=8$. Viết phương trình chính tắc của elip (E), biết (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và (E) cắt (C) tại bốn điểm tạo thành bốn đỉnh của hình vuông.

(Trích đề thi TSĐH khối A, A₁ –2012)

Hướng dẫn giải

Phương trình chính tắc của (E) có dạng $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ với $a > b > 0$ và $2a = 8$.

Suy ra a = 4.

Do (E) và (C) cùng nhận Ox và Oy làm trục đối xứng và các giao điểm là các đỉnh của một hình vuông nên (E) và (C) có một giao điểm với toạ độ dạng A(t ; t), t > 0. $A\in(C)\Leftrightarrow t^2+t^2=8$, suy ra t = 2.

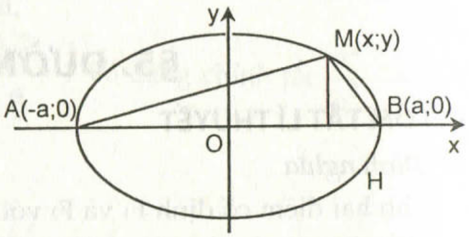
$A\in(C)\Leftrightarrow\dfrac{4}{16}+\dfrac{4}{b^2}=1\Leftrightarrow b^2=\dfrac{16}{3}$. là

Vậy phương trình chính tắc (E) là $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{\dfrac{16}{3}}=1$

- **Tập hợp điểm là elip**

3.116. Trong mặt phẳng cho hai điểm A, B cố định. Tìm tập hợp những điểm M trên mặt phẳng sao cho $\tan\widehat{MAB}.\tan\widehat{MBA}=\dfrac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải



Chọn hệ tọa độ như hình vẽ.

Chú ý rằng ta phải có các góc $\widehat{MAB}$ và $\widehat{MBA}$ đều nhọn. Do đó nếu gọi H là hình chiếu của M lên AB thì H nằm bên trong đoạn AB.

Giả sử M(x; y). Ta có

$\tan\widehat{MAB}=\dfrac{MH}{AH}=\dfrac{|y|}{x+a}$, $\tan\widehat{MBA}=\dfrac{MH}{BH}=\dfrac{|y|}{a-x}$

Theo giả thiết $\dfrac{|y|}{a+x}.\dfrac{|y|}{a-x}=\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow 5y^2=a^2-x^2\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{\dfrac{a^2}{5}}=1$

Vậy tập hợp M là elip: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{\dfrac{a^2}{5}}=1$.

3.117. Tìm tập hợp những điểm M(x ; y) trong mặt phẳng tọa độ sao cho

$$x=4\sin t;\ y=3\cos t \text{ với } t\in\mathbb{R}.$$

Hướng dẫn giải

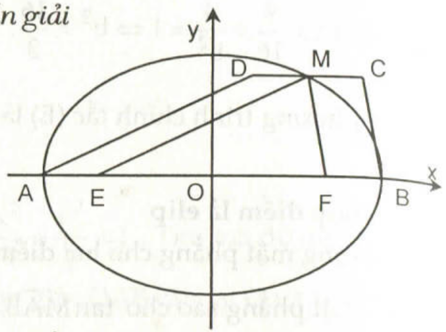
Từ giả thiết $x=4\sin t; y=3\cos t$

Ta có $\dfrac{x}{4}=\sin t;\dfrac{y}{3}=\cos t\Rightarrow\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=\sin^2t+\cos^2t=1$

Tập hợp M là elip có phương trình $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

3.118. Cho hai điểm A, B cố định. Xét hình thang ABCD có đáy lớn AB sao cho $AD + BC = AB$ và $CD = \frac{AB}{3}$. Tìm tập hợp trung điểm M của CD.

Hướng dẫn giải



Gọi E, F là hai điểm trên AB sao cho ME // AD và MF // BC. Khi đó ADME và BCMF là các hình bình hành.

Ta có $AE = BF = \frac{CD}{2} = \frac{1}{6}AB$

Suy ra E, F cố định.

Hơn nữa $ME = AD$, $MF = BC$.

Do đó: $ME + MF = AD + BC = AB$ (không đổi).

Vậy tập hợp điểm M là elip có E, F là tiêu điểm và độ dài trục lớn là AB.

§5. ĐƯỜNG HYPEBOL

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa

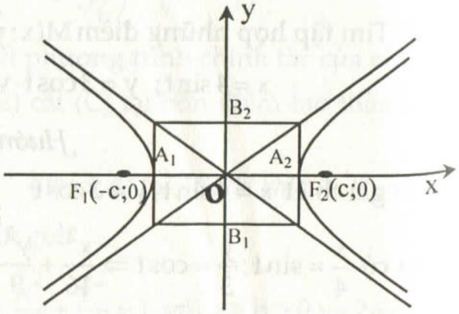
Cho hai điểm cố định F_1 và F_2 với $F_1F_2 = 2c$ ($c > 0$). Hypebol là tập hợp các điểm M sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$, trong đó a là số dương không đổi nhỏ hơn c.

2. Phương trình chính tắc của hypebol (H)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ với } c^2 = a^2 + b^2. \qquad (1)$$

3. Hình dạng của (H)

Cho hypebol (H) có phương trình chính tắc (1). Ta có:



- (H) có tiêu điểm $F_1(-c\,;0)$ và $F_2(c\,;0)$, tiêu cự 2c.
- (H) có 2 đỉnh $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, đây là các giao điểm của (H) với Ox.

  (H) không cắt Oy.
- (H) có độ dài trục thực 2a, độ dài trục ảo 2b.
- $M(x;y) \in (H)$ thì xảy ra hai trường hợp:
  - M thuộc nhánh phải thì

    $MF_1 = \frac{c}{a}x + a$ và $MF_2 = \frac{c}{a}x - a$.
  - M thuộc nhánh trái thì

$MF_1 = -(\frac{c}{a}x + a)$ và $MF_2 = -(\frac{c}{a}x - a)$.

(MF_1 và MF_2 được gọi là các bán kính qua tiêu).

- (H) có tâm sai $e = \frac{c}{a}$ ($e > 1$). Hai đường tiệm cận: $y = \pm\frac{b}{a}x$.

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định các yếu tố của hypebol.

Bài 51. Xác định toạ độ các đỉnh, tiêu điểm, độ dài trục thực, trục ảo, tiêu cự, tâm sai và phương trình các đường tiệm cận của mỗi hypebol có phương trình sau:

a) $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$; b) $4x^2 - y^2 = 4$.

Giải.

a) Phương trình của hypebol (H): $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ có dạng chính tắc $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,

ta có : $\begin{cases} a^2 = 8 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 16$

Suy ra: $a = 2\sqrt{2}$, $b = 2$, $c = 4$. Vậy (H) có

+ Đỉnh $A_1(-2\sqrt{2}\,;0)$, $A_2(2\sqrt{2}\,;0)$.
+ Tiêu điểm $F_1(-4\,;0)$, $F_2(4\,;0)$
+ Độ dài trục thực $A_1A_2 = 4\sqrt{2}$, độ dài trục ảo $B_1B_2 = 4$.
+ Tiêu cự $2c = 8$; tâm sai $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$.
+ Phương trình các đường tiệm cận : $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}x$

b) Ta có (H') : $4x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$. Từ đó :

$a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$; $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$; $c^2 = a^2 + b^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$.

Do đó (H') có :

+ Đỉnh $A_1(-1\,;0)$ và $A_2(1\,;0)$.
+ Tiêu điểm: $F_1(-\sqrt{5}\,;0)$, $F_2(\sqrt{5}\,;0)$.
+ Độ dài trục thực : $2a = 2$, độ dài trục ảo : $2b = 4$.
+ Tiêu cự $2c = 2\sqrt{5}$; tâm sai $e = \frac{c}{a} = \sqrt{5}$.
+ Phương trình các đường tiệm cận là: $y = \pm 2x$.

Dạng 2. Viết phương trình chính tắc của hypebol.

Bài 52. Lập phương trình chính tắc của hypebol biết

a) Độ dài trục ảo là $2\sqrt{5}$, tiêu cự là 8;

b) Hypebol qua hai điểm $M(6\,;\,3)$, $N\left(5\sqrt{2}\,;\,-4\right)$.

Giải.

Phương trình chính tắc của hypebol có dạng $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ với $a>b>0$.

a) Theo giả thiết $\begin{cases}2b=2\sqrt{5}\Rightarrow b=\sqrt{5}\\ 2c=8\Rightarrow c=4\end{cases}$

Từ đó $a^2=c^2-b^2=16-5=11$.

Vậy phương trình chính tắc của hypebol là $\dfrac{x^2}{11}-\dfrac{y^2}{5}=1$.

b) Vì hypebol qua hai điểm M, N nên ta có hệ

$$\begin{cases}\dfrac{36}{a^2}-\dfrac{9}{b^2}=1\\ \dfrac{50}{a^2}-\dfrac{16}{b^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{18}\\ \dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=18\\ b^2=9\end{cases}$$

Vậy phương trình chính tắc của hypebol là $\dfrac{x^2}{18}-\dfrac{y^2}{9}=1$.

Bài 53. Viết phương trình chính tắc của hypebol (H) trong mỗi trường hợp:

a) (H) có tiêu điểm $F_2(2\sqrt{5}\,;\,0)$ và một đường tiệm cận là $2x+y=0$

b) (H) có tâm sai $e=\sqrt{5}$ và đi qua điểm $\left(\sqrt{10}\,;\,6\right)$.

Giải.

a) (H) có tiêu điểm $F_2(2\sqrt{5}\,;\,0)$ nên $c=2\sqrt{5}$.

(H) có một đường tiệm cận là $2x+y=0\Leftrightarrow y=-2x\Rightarrow\dfrac{b}{a}=2\Rightarrow b=2a$.

Từ đó $a^2+b^2=5a^2=c^2=20\Rightarrow a^2=4,\ b^2=16$.

Vậy (H) có phương trình $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$.

b) Hypebol (H) có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Vì (H) có tâm sai $e=\sqrt{5}$ và đi qua điểm $\left(\sqrt{10}\,;\,6\right)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}c=\sqrt{5}a\\ \dfrac{10}{a^2}-\dfrac{36}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2+b^2=5a^2\\ \dfrac{10}{a^2}-\dfrac{36}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=1\\ b^2=4\end{cases}.$$

Vậy phương trình của hypebol là $\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{4}=1$.

Dạng 3. Tìm điểm trên hypebol thoả mãn điều kiện cho trước.

Bài 54. Cho hypebol (H) : $\dfrac{x^2}{7}-\dfrac{y^2}{9}=1$. Tìm điểm M nằm trên hypebol sao cho

a) $MF_1=3MF_2$;

b) M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 60^0.

Giải.

a) Ta có $a^2=7, b^2=9, c^2=a^2+b^2=16$.

Suy ra $a=\sqrt{7}, b=3, c=4$.

Như thế $MF_1=3MF_2\Leftrightarrow\left|a+\dfrac{c}{a}x\right|=3\left|a-\dfrac{c}{a}x\right|$

$\Leftrightarrow a+\dfrac{c}{a}x=3\left(a-\dfrac{c}{a}x\right)$ hoặc $a+\dfrac{c}{a}x=-3\left(a-\dfrac{c}{a}x\right)$

$\Leftrightarrow 4\dfrac{c}{a}x=2a$ hoặc $2\dfrac{c}{a}x=4a\Leftrightarrow x=\dfrac{a^2}{2c}=\dfrac{7}{8}$ hoặc $x=\dfrac{2a^2}{c}=\dfrac{7}{2}$.

- Với $x=\dfrac{7}{8}$ thì $y^2=\dfrac{x^2}{7}-1=\dfrac{7}{64}-1<0$ (loại)
- Với $x=\dfrac{7}{2}$ thì $y^2=9\left(\dfrac{x^2}{7}-1\right)=9\left(\dfrac{7}{4}-1\right)=\dfrac{27}{4}\Rightarrow y=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Vậy có hai điểm thoả mãn yêu cầu bài toán là $M\left(\dfrac{7}{2};\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

b) Giả sử $M(x\,;\,y)$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Vì M nằm trên (H) nên $\dfrac{x^2}{7}-\dfrac{y^2}{9}=1$.

Áp dụng định lí côsin cho tam giác MF_1F_2, ta có

$F_1F_2{}^2=MF_1{}^2+MF_2{}^2-2MF_1.MF_2\cos60^0=MF_1{}^2+MF_2{}^2-MF_1.MF_2$

Hay có thể viết $F_1F_2{}^2=(MF_1-MF_2)^2+MF_1.MF_2$.

Suy ra $MF_1.MF_2=(MF_1+MF_2)^2-F_1F_2{}^2=4a^2-4c^2=28-64=-36$

Sử dụng công thức tính bán kính qua tiêu, ta có:

$$-36 = MF_1.MF_2 = \left|a + \frac{c}{a}x\right|\left|a - \frac{c}{a}x\right| = \left|a^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2\right|$$

- Xét $-36 = a^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2(a^2+36)}{c^2} = \frac{301}{16}$

Thay giá trị $x^2 = \frac{301}{16}$ vào phương trình hypebol, ta tính được $y^2 = \frac{243}{16}$.

- Xét $-36 = -a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2(a^2-36)}{c^2} < 0$ (loại).

Như thế có 4 điểm thoả mãn yêu cầu bài toán là

$$\left(\pm\frac{\sqrt{301}}{4}; \frac{\sqrt{243}}{4}\right), \left(\pm\frac{\sqrt{301}}{4}; -\frac{\sqrt{243}}{4}\right).$$

> *Dạng 4. Tập hợp điểm là hypebol.*
> - *Sử dụng định nghĩa hypebol.*
> - *Trong một số trường hợp cần phải chọn hệ trục tọa độ thích hợp.*

Bài 55. Cho đường tròn (C) : $(x+3)^2 + y^2 = 4$ và điểm $I(3;0)$. Tìm tập hợp tâm các đường tròn qua I và tiếp xúc với (C).

Giải

(C) là đường tròn tâm $J(-3;0)$, bán kính là 2.

Gọi M là tâm đường tròn qua I và tiếp xúc với (C) tại N.

Ta có MN = MI , JN =1

- (M) tiếp xúc ngoài với (C) (Hình vẽ)

Khi đó

MJ – MI = JN + MN – MI = JN = 2.

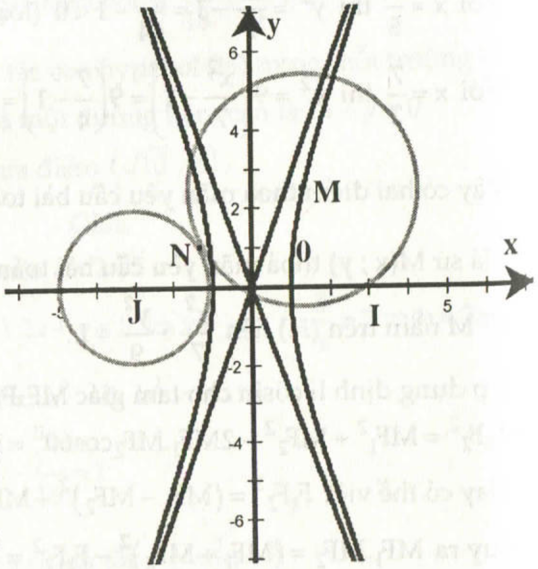
- (M) tiếp xúc trong với (C) (Hình vẽ)

Khi đó

MI – MJ = MN –MJ = JN =2.

Như thế trong hai trường hợp ta đều có |MJ – MI| = 2.

Vậy tập hợp M là hyperbol có hai tiêu điểm là I và J, tiêu cự là 2c = 6, độ dài trục thực là 2a = 2.



Phương trình chính tắc của hypebol là $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{8} = 1$.

Bài 56. Trong hệ tọa độ Oxy cho $A_1(-a\,;0)$, $A_2(a;0)$. Gọi (C) là đường tròn thay đổi đi qua A_1, A_2 ; MM′ là đường kính của (C) và luôn song song với Ox. Tìm tập hợp các điểm M và M′.

Giải

Gọi I là tâm đường tròn (C) thì I nằm trên trục Oy, nếu tọa độ I là $(0;b)$ thì bán kính của (C) là $R = \sqrt{a^2+b^2}$. Vì MM′ // Ox và IM = IM′ nên nếu M(x; y) thì M′(–x ; y), trong đó x = R và y = b.

Từ đó suy ra $R = \sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow R^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = a^2$.

Vậy quỹ tích của M và M′ là hypebol có phương trình $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$.

C. LUYỆN TẬP

- **Xác định các yếu tố của hypebol**

3.119. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai ?

a) Hypebol $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$ có tiêu cự là $2\sqrt{3}$.

b) Hypebol $x^2 - y^2 = 1$ có hai tiệm cận vuông góc với nhau.

c) Hypebol $5x^2 - 2y^2 = 10$ có tổng trục thực và độ dài trục ảo là 7.

d) Tâm sai của hypebol là tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục thực.

e) Nếu $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ là phương trình chính tắc của hypebol thì $a > b > 0$.

Hướng dẫn giải

a), c), e) sai; b) và d) đúng.

3.120. Hãy điền các yếu tố của hypebol vào bảng sau đây

Hyperbol	Đỉnh	Tiêu điểm	Tiêu cự	Độ dài trục thực – ảo	Tâm sai	PT tiệm cận
$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$						
$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$						
$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$						
$3x^2 - 5y^2 = 15$						

Hướng dẫn giải

Hyperbol	Đỉnh	Tiêu điểm	Tiêu cự	Độ dài trục thực – ảo	Tâm sai	PT tiệm cận
$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$	$(\pm5;0)$	$\left(\pm\sqrt{34};0\right)$	$2\sqrt{34}$	10 và 6	$\frac{\sqrt{34}}{5}$	$y=\pm\frac{3}{5}x$
$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$	$(\pm2;0)$	$(\pm3;0)$	6	4 và $2\sqrt{5}$	$\frac{3}{2}$	$y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$
$x^2-\frac{y^2}{3}=1$	$(\pm1;0)$	$(\pm2;0)$	4	2 và $2\sqrt{3}$	2	$y=\pm\sqrt{3}x$
$3x^2-5y^2=15$	$\left(\pm\sqrt{5};0\right)$	$\left(\pm\sqrt{15};0\right)$	$2\sqrt{15}$	$2\sqrt{5}$, $2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$y=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$

3.121. Cho (H) : $5x^2-4y^2=20$.

Hãy xác định tọa độ các đỉnh, tâm sai và các kích thước của hình chữ nhật cơ sở của hypebol.

Hướng dẫn giải

Viết phương trình của hypebol dưới dạng $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

Ta có $a^2=4, b^2=5, c^2=9 \Rightarrow a=2, b=\sqrt{5}, c=3\frac{1}{2}$

+ Hai đỉnh của hypebol là $A_1(-2;0), A_2(2;0)$

+ Các kích thước của hình chữ nhật cơ sở là $2a=4$, $2b=2\sqrt{5}$

+ Tâm sai $e=\frac{3}{2}$

- **Phương trình chính tắc của hypebol**

3.122. Lập phương trình chính tắc của (H) trong mỗi trường hợp sau:

a) (H) có độ dài trục ảo bằng 8 và tiêu cự bằng 10;

b) (H) có tâm sai bằng $\frac{3}{2}$ và độ dài trục thực bằng 6;

c) (H) có tiêu cự bằng 10 và qua M(– 4 ; 0);

Hướng dẫn giải

a) (H) có độ dài trục ảo $2b=8 \Rightarrow b=4$; có tiêu cự $2c=10 \Rightarrow c=5$.

Từ đó ta có $a=\sqrt{c^2-b^2}=3$.

Vậy phương trình chính tắc của hypebol là $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

b) Hypebol có tâm sai $\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$ và độ dài trục thực $2a=6$, suy ra $a=3$ và $c=\frac{3a}{2}=\frac{9}{2}$. Do đó ta có $b=\sqrt{c^2-a^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Vậy phương trình chính tắc của hypebol là $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{\frac{45}{4}}=1$.

c) (H) có $2c=10 \Rightarrow c=5$, suy ra $b^2=c^2-a^2=25-a^2$.

Do đó (H) có phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{25-a^2}=1$.

Vì (H) đi qua M(– 4 ; 0) nên $a^2=16$.

Vậy phương trình chính tắc của hypebol là $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

3.123. Lập phương trình chính tắc của hypebol trong các trường hợp sau:

a) Đỉnh $A_1(-4;0)$, độ dài trục ảo là 10.

b) Tiêu cự là $2\sqrt{7}$ và hypebol qua điểm $\left(-\frac{\sqrt{22}}{2};\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$.

c) Độ dài trục ảo là 6 và phương trình một đường tiệm cận là $y=\frac{3}{4}x$.

d) Qua điểm M(6;3) và góc giữa hai tiệm cận là 60⁰.

Hướng dẫn giải

a) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$ b) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$

c) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ d) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$, $\frac{x^2}{33}-\frac{y^2}{99}=1$

3.124. Lập phương trình chính tắc của hypebol trong các trường hợp sau

a) Qua hai điểm $M\left(3;\frac{1}{2\sqrt{2}}\right), N\left(4\sqrt{2};-\sqrt{3}\right)$

b) Tâm sai là $e=\frac{\sqrt{10}}{2}$ và diện tích hình chữ nhật cơ sở là $4\sqrt{6}$

c) Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là $3x\pm1=0$ và $y\pm2=0$

d) Độ dài trục ảo là $2\sqrt{7}$ và khoảng cách giữa tiêu điểm và đỉnh trên tia Ox là 1

Hướng dẫn giải

a) $\frac{x^2}{8}-y^2=1$ b) $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$ c) $\frac{x^2}{1/9}-\frac{y^2}{4}=1$ d) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$

- **Tìm điểm trên hypebol thoả mãn điều kiện cho trước**

3.125. Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a,b>0)$. M(x₀; y₀) là hai điểm nằm trên hypebol.

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

a) $MF_2-MF_1=2a$;

b) $x_0\le -a$ hoặc $x_0\ge a$;

c) $-b\le y_0\le b_0$;

d) $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$.

Hướng dẫn giải

a) c) d) sai ; b) đúng.

3.126. Cho hypebol (H) : $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. Tìm điểm M trên hypebol sao cho

a) M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông ;

b) Tổng các khoảng cách từ M đến hai tiệm cận là $\frac{24\sqrt{2}}{5}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $a=4, b=3, c=5$

Với M(x;y) nằm trên hypebol thì $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

Vì M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông nên

$$OM=\frac{F_1F_2}{2}=c=5\Rightarrow x^2+y^2=25$$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1\\ x^2+y^2=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x^2}{16}-\frac{25-x^2}{9}=1\\ y^2=25-x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}25x^2=544\\ y^2=25-x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\frac{544}{25}\\ y^2=\frac{81}{25}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm\frac{4\sqrt{34}}{5}\\ y=\pm\frac{9}{5}\end{cases}\Rightarrow \text{ có 4 điểm thoả mãn ycbt là: }\left(\pm\frac{4}{5}\sqrt{34};\pm\frac{9}{5}\right).$$

b) Phương trình hai đường tiệm cận là $3x\pm 4y=0$. Gọi $M(x;y)\in(H)$ là điểm thoả mãn yêu cầu bài toán. Do tính chất đối xứng nên có thể xem $x,y>0$.

Khi đó $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

Tổng khoảng cách đến hai tiệm cận là

$$\frac{|3x+4y|}{5}+\frac{|3x-4y|}{5}=\frac{24\sqrt{2}}{5}\Leftrightarrow 3x+4y+|3x-4y|=24\sqrt{2}$$

- Xét $3x-4y>0$. Khi đó có $6x=24\sqrt{2}\Rightarrow x=4\sqrt{2}$

  Như vậy $y^2=9\Rightarrow y=3$. Ta có điểm $M\left(4\sqrt{2};3\right)$

- Xét $3x-4y<0$. Khi đó có $8y=24\sqrt{2}\Rightarrow y=3\sqrt{2}$

  Như vậy $x^2=48\Rightarrow x=4\sqrt{3}$.(loại vì $3x-4y>0$)

  Tóm lại có 4 điểm thoả mãn yêu cầui bài toán là $M\left(\pm4\sqrt{2};\pm3\right)$.

3.127. Cho hyperbol (H): $3x^2-4y^2=12$ có các tiêu điểm F_1,F_2

a) M là điểm trên (H) có $MF_1=3$. Hãy tính MF_2 và tọa độ của M.

b) Tìm trên một nhánh của (H) hai điểm P, Q sao cho tam giác OPQ là tam giác đều.

Hướng dẫn giải

Viết phương trình hypebol dưới dạng $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$

Ta có $a=2, b=\sqrt{3}, c=\sqrt{7}$.

a) Vì M nằm trên hypebol nên $|MF_1-MF_2|=2a=4$

Do $MF_1=3$ nên $|3-MF_2|=4\Leftrightarrow 3-MF_2=4$ hoặc $3-MF_2=-4$.

Từ đó ta có $MF_2=7$

Mặt khác $3=MF_1=\left|a+\frac{c}{a}x\right|=\left|2+\frac{\sqrt{7}}{2}x\right|\Leftrightarrow 2+\frac{\sqrt{7}}{2}x=\pm3$

Từ đó ta tính được $x=\frac{2}{\sqrt{7}}$ (loại), $x=\frac{-10}{\sqrt{7}}$

Như thế các điểm M thoả mãn yêu cầu bài toán là $M\left(\frac{-10}{\sqrt{7}};\frac{\pm3\sqrt{42}}{7}\right)$

b) Ta có thể xem P, Q thuộc nhánh phải của hypebol, nghĩa là $x_P,x_Q>0$.

Tam giác OPQ đều nên OP = OQ hay $x_P^2+y_P^2=x_Q^2+y_Q^2$

Vì P nằm trên elip nên $\frac{x_P^2}{4}-\frac{y_P^2}{3}=1\Rightarrow y_P^2=3\left(\frac{x_P^2}{4}-1\right)$

Tương tự $y_Q^2=3\left(\frac{x_Q^2}{4}-1\right)$. Như thế hệ thức trên trở thành

$$x_P^2+3\left(\frac{x_P^2}{4}-1\right)=x_Q^2+3\left(\frac{x_Q^2}{4}-1\right)\Leftrightarrow x_P^2=x_Q^2\Leftrightarrow x_P=x_Q.$$

Từ đó suy ra P, Q đối xứng nhau qua trục hoành.

Do đó ta chỉ cần xác định điểm P với $y_P > 0$

Tam giác OPQ đều nên OP tạo với tia Ox góc 30^0.

Từ đó có $x_p = y_P\sqrt{3} \Rightarrow x_P^2 = 3y_P^2$

Do đó $y_P^2 = 3\left(\frac{x_P^2}{4} - 1\right) = \frac{x_P^2}{3} \Rightarrow x_P = \frac{6}{\sqrt{5}} \Rightarrow y_P = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

Như vậy hai điểm cần xác định là $P\left(\frac{6}{\sqrt{5}}; \frac{2\sqrt{3}}{5}\right), Q\left(\frac{6}{\sqrt{5}}; \frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$.

Ta cũng có hai điểm thuộc nhánh trái của hypebol là

$$R\left(\frac{-6}{\sqrt{5}}; \frac{2\sqrt{3}}{5}\right), S\left(\frac{-6}{\sqrt{5}}; \frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right).$$

3.128. Cho hypebol có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$

a) Tìm điểm M trên hypebol sao cho khoảng cách từ M đến tiêu điểm này bằng hai lần khoảng cách từ M đến tiêu điểm kia.

b) Tìm tọa độ giao điểm P, Q của hyperbol với đường thẳng d: $x + 3y - 12 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) Ta dễ dàng có $a = 2\sqrt{5}, b = \sqrt{5}, c = 5$

Gọi $M(x;y) \in (H) \Rightarrow \begin{cases} MF_1 = \left|a + \frac{c}{a}x\right| \\ MF_2 = \left|a - \frac{c}{a}x\right| \end{cases}$

Theo giả thiết $MF_1 = 2MF_2$ hoặc $MF_2 = 2MF_1$

$\Leftrightarrow (MF_1 - 2MF_2)(MF_2 - 2MF_1) = 0 \Leftrightarrow 5MF_1.MF_2 - 2\left(MF_1^2 + MF_2^2\right) = 0$

$\Leftrightarrow 5MF_1.MF_2 - 2\left((MF_1 - MF_2)^2 + 2MF_1.MF_2\right) = MF_1.MF_2 - 2(MF_1 - MF_2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left|a + \frac{c}{a}x\right|\left|a - \frac{c}{a}x\right| - 2.(2a)^2 = 0 \Leftrightarrow \left|a^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2\right| = 8a^2$

$\Leftrightarrow a^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 = 8a^2$ (loại) hoặc $-a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2 = 8a^2$

$\Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2}x^2 = 9a^2 \Leftrightarrow x = \pm\frac{3a^2}{c} = \pm 12$. Từ đó ta tính được $y = \pm\sqrt{31}$.

Vậy có 4 điểm trên hypebol thoả mãn yêu cầu bài toán là $\left(\pm 12; \pm\sqrt{31}\right)$.

b) Tọa độ giao điểm của hypebol và d là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1 \\ x + 3y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1 \\ x = 12 - 3y \end{cases}$$

Thay $x = 12 - 3y$ vào phương trình đầu của hệ ta được

$\frac{(12-3y)^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1 \Leftrightarrow 5y^2 - 72y + 124 = 0 \Leftrightarrow y = 2$ hoặc $y = \frac{62}{5}$

Từ đó ta tìm được hai giao điểm của d và (H) là $A(6;2), B\left(\frac{-126}{5}; \frac{62}{5}\right)$.

3.129. Cho (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ có tâm sai $e = \sqrt{2}$.

Chứng minh rằng: $OM^2 = F_1M.F_2M$ với mọi điểm $M \in (H)$.

Hướng dẫn giải

Chú ý $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2} \Rightarrow c^2 = 2a^2 \Rightarrow a^2 = b^2$

$\Rightarrow$ phương trình (H) : $x^2 - y^2 = a^2$.

Cho bất kì điểm $M(x ; y) \in (H)$. Trong mọi trường hợp ta đều có :

$$F_1M.F_2M = (\sqrt{2}x + a)(\sqrt{2}x - a) = 2x^2 - a^2.$$

Từ đó, ta có $OM^2 = x^2 + y^2 = 2x^2 - a^2 = F_1M.F_2M$.

3.130. Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$. M là một điểm trên hypebol.

Chứng minh rằng

a) $OM^2 - F_1M.F_2M = a^2 - b^2$

b) $(MF_1 + MF_2)^2 = 4(OM^2 + b^2)$

c) Tích các khoảng cách từ M đến hai tiệm cận là một hằng số.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $M(x;y) \Rightarrow \begin{cases} MF_1 = |a + ex| \\ MF_2 = |a - ex| \end{cases}$

Từ đó $OM^2 - F_1M.F_2M = a^2 + b^2 = -|(a + ex)(a - ex)| + x^2 + y^2$

$= -\left|a^2 - e^2x^2\right| + x^2 + y^2 = -\left|a^2 - \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)x^2\right| + x^2 + y^2 =$

$= a^2 - b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) = a^2 - b^2$

b) Ta có $(F_1M+F_2M)^2-4OM^2=F_1M^2+2F_1M.F_2M+F_2N^2-4(x^2+y^2)$

Thay biểu thức của F_1M và F_2M ta được điều phải chứng minh.

c) Phương trình hai đường tiệm cận $y=\pm\frac{b}{a}x\Leftrightarrow bx\pm ay=0$

Khoảng cách từ điểm M(x0;y0) đến hai tiệm cận là $\frac{|bx_0\pm ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Do đó tích các khoảng cách từ M đến hai tiệm cận là

$$\frac{|bx_0-ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}.\frac{|bx_0+ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|b^2x_0^2-a^2y_0^2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a^2b^2\left|\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

- **Tập hợp điểm là hypebol**

3.131. Cho điểm F(–3;0) và đường thẳng $\Delta: x+2=0$. Tìm tập hợp những điểm M trong mặt phẳng sao cho $MF=\frac{3}{\sqrt{6}}d(M,\Delta)$.

Hướng dẫn giải

Tập hợp những điểm M là hypebol có phương trình $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$.

3.132. Cho hai đường thẳng $d: y=2x$ và $d': y=-2x$. Tìm tập hợp những điểm M trên mặt phẳng sao cho tích các khoảng cách từ M đến d và d′ bằng 4.

Hướng dẫn giải

Giả sử M(x ; y) là điểm thoả mãn yêu cầu bài toán.

Ta có $d: 2x-y=0$ và $d': 2x+y=0$.

Theo giả thiết: $d(M,d).d(M,d')=4\Leftrightarrow\frac{|2x-y|}{\sqrt{4+1}}.\frac{|2x+y|}{\sqrt{4+1}}=4\Leftrightarrow|4x^2-y^2|=20$

$\Leftrightarrow 4x^2-y^2=20$ hoặc $4x^2-y^2=-20$

$\Leftrightarrow\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$ hoặc $\frac{y^2}{20}-\frac{x^2}{5}=1$

Vậy tập hợp điểm M là hai hypebol có phương trình:

$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$ và $\frac{y^2}{20}-\frac{x^2}{5}=1$.

3.133. Tìm tập hợp những điểm M(x;y) trong mặt phẳng tọa độ sao cho

$$x=\frac{2}{\cos t},y=3\tan t\left(t\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right).$$

Hướng dẫn giải

Tập hợp các điểm M là hypebol có phương trình $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$.

§6. ĐƯỜNG PARABOL

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. *Định nghĩa parabol*

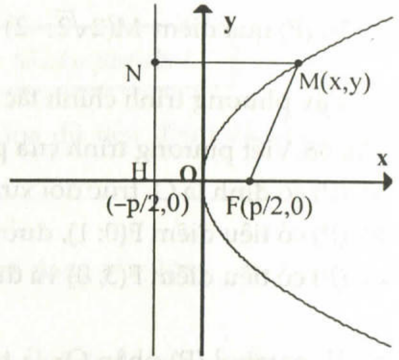
Cho điểm F cố định và một đường thẳng cố định Δ không đi qua F.

- Parabol (P) là tập hợp các điểm M có khoảng cách đến F bằng khoảng cách từ nó đến Δ.

$M\in(P)\Leftrightarrow MF=d(M;\Delta)$.

- F gọi là tiêu điểm, Δ gọi là đường chuẩn.
- Số dương p = d(F; Δ) gọi là tham số tiêu.

2. *Phương trình chính tắc của (P)*



$y^2=2px$. (1)

với $F(\frac{p}{2};0)$ và đường chuẩn $\Delta: x=-\frac{p}{2}$.

3. *Hình dạng, các yếu tố của (P)*

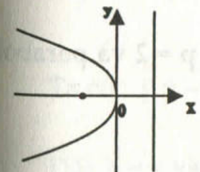
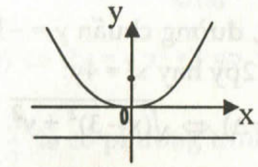
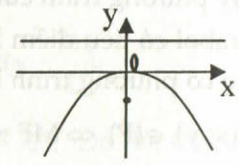
Cho (P) có phương trình chính tắc

$y^2=2px$. Ta có :

- (P) có bán kính qua tiêu $MF=x+\frac{p}{2}$.
- (P) có đỉnh là O, trục đối xứng là Ox.

4. *Chú ý*

Ngoài parabol có dạng chính tắc như trên, ta cũng có các parabol sau

		
$(P_1): y^2=-2px$	$(P_2): x^2=2py$	$(P_3): x^2=-2py$
$F(-p/2;0);\Delta: x=p/2$	$F(0;p/2);\Delta: y=-p/2$	$F(0;-p/2);\Delta: y=p/2$

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 1. Lập phương trình chính tắc của parabol.

Bài 57. Lập phương trình chính tắc của parabol (P) trong các trường hợp sau đây

a) (P) có tiêu điểm F(4;0)

b) (P) có đường chuẩn $\Delta: x+3=0$

c) (P) đi qua điểm $M(2\sqrt{2};-2)$.

Giải

Phương trình chính tắc của (P) có dạng $y^2 = 2px\,(p>0)$

a) Vì (P) có tiêu điểm $F(4;0)$ nên $\frac{p}{2} = 4 \Rightarrow p = 8$

Vậy phương trình chính tắc là $y^2 = 16x$

b) Vì (P) có đường chuẩn $\Delta: x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$ nên ta có $-\frac{p}{2} = -3 \Rightarrow p = 6$

Vậy phương trình chính tắc là $y^2 = 12x$

c) Vì (P) qua điểm $M(2\sqrt{2};-2)$ nên $(-2)^2 = 2p.2\sqrt{2} \Rightarrow p = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy phương trình chính tắc là $y^2 = x\sqrt{2}$.

Bài 58. Viết phương trình của parabol (P) trong mỗi trường hợp sau:

a) (P) có đỉnh là O, trục đối xứng là Ox và tiêu điểm $F(-4;0)$.

b) (P) có tiêu điểm $F(0;1)$, đường chuẩn $y=-1$.

c) (P) có tiêu điểm $F(3;0)$ và đường chuẩn $\Delta: x=-1$.

Giải

a) Vì parabol (P) nhận Ox là trục đối xứng, đỉnh là gốc O. Tiêu điểm $F(-4;0)$ nên phương trình của (P) có dạng $y^2 = -2px$.

Tiêu điểm $F(-4;0)$ nên $\frac{p}{2} = 4 \Rightarrow p = 8$.

Vậy phương trình của parabol là $y^2 = -16x$.

b) Parabol có tiêu điểm $F(0;1)$, đường chuẩn $y=-1$, suy ra $p=2$ và parabol đã cho có phương trình là $x^2 = 2py$ hay $x^2 = 4y$.

c) $M(x;y) \in (P) \Leftrightarrow MF = d(M;\Delta) \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+y^2} = |x-1|$

$\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2 = x^2-2x+1 \Leftrightarrow y^2 = 4x-8$.

Vậy phương trình của parabol là $y^2 = 4x-8$.

(Phương trình (P) là $y^2 = 4(x-2)$, đây là parabol có đỉnh là $I(2;0)$ và tham số tiêu bằng 2).

Bài 59. Lập phương trình chính tắc của parabol biết parabol cắt đường thẳng $d: y = x\sqrt{3}$ tại hai điểm A, B mà $AB=2$.

Giải

Phương trình chính tắc của parabol có dạng $y^2 = 2px\,(p>0)$.

Tọa độ giao điểm của parabol và d là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = x\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{2p} = \frac{y}{\sqrt{3}} \Rightarrow y\left(y\sqrt{3}-2p\right) = 0$$

Như thế ta có $y=0\,(x=0)$ và $y = \frac{2p}{\sqrt{3}}\left(x = \frac{2p}{3}\right)$.

Vậy (P) cắt d tại hai điểm $O(0;0)$ và $A\left(\frac{2p}{3};\frac{2p}{\sqrt{3}}\right)$.

Theo giả thiết $OA = 2 \Leftrightarrow OA^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{4p^2}{9} + \frac{4p^2}{3} = 4 \Leftrightarrow p^2 = \frac{36}{16} \Leftrightarrow p = \frac{3}{2}$

Vậy phương trình chính tắc của parabol là $y^2 = 3x$.

Dạng 2. Xác định các yếu tố của parabol.

Bài 60. Cho parabol (P): $y^2 = 8x$. xác định tọa độ tiêu điểm và phương trình đường chuẩn.

Giải

Ta có phương trình parabol (P) : $y^2 = 8x$ có dạng $y^2 = 2px$.

Suy ra $2p = 8 \Rightarrow p = 4$

Vậy parabol có tiêu điểm $F(2;0)$ và phương trình đường chuẩn $x=-2$.

Bài 61. Đường cong $y = -\frac{1}{2}(x^2-3)$ có phải là parabol không ? nếu là parabol hãy xác định tọa độ tiêu điểm của nó.

Giải

Ta có : $y = -\frac{1}{2}(x^2-3) \Leftrightarrow 2y = -x^2+3 \Leftrightarrow x^2 = -2(y-\frac{3}{2})$.

Đặt $X = x$ và $Y = y - \frac{3}{2}$ ta có phương trình : $X^2 = -2Y$. Do đó, đường cong đã cho là một parabol trong hệ toạ độ mới XO'Y, với tham số tiêu bằng $p=1$.

Do đó tiêu điểm trong hệ toạ độ mới có toạ độ là $X_0 = 0$ và $Y_0 = -\frac{1}{2}$.

Suy ra toạ độ tiêu điểm trong hệ trục ban đầu là $F(x;y)$, với: $x = X_0 = 0$ và $y = Y_0 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$.

Vậy đường cong là parabol có toạ độ tiêu điểm là $F(0;1)$.

Dạng 3. Tập hợp điểm là parabol và các bài toán có dạng liên quan.

- *Sử dụng định nghĩa parabol.*
- *Trong một số trường hợp cần phải chọn hệ trục tọa độ thích hợp.*

Bài 62. Cho đường thẳng Δ và điểm O không nằm trên Δ với d(O; Δ) = 2. N là điểm thay đổi trên Δ. Đường thẳng qua N vuông góc với Δ cắt đường thẳng qua O vuông góc với ON tại M. Tìm tập hợp điểm M.

Giải

Chọn hệ tọa độ gốc O như hình vẽ. Khi đó phương trình của Δ là $x+2=0$.

Giả sử $M(x;y)$. Khi đó $N(-2;y)$

Ta có: $\overline{OM}=(x;y)$, $\overline{ON}=(-2;y)$

Theo giả thiết

$OM\perp ON \Leftrightarrow \overline{OM}.\overline{ON}=0 \Leftrightarrow -2x+y^2=0 \Leftrightarrow y^2=2x$

Vậy tập hợp điểm M là parabol có phương trình $y^2=2x$.

Bài 63. Cho dây cung MN đi qua tiêu điểm của đường parabol (P). Chứng minh rằng khoảng cách từ trung điểm I của MN đến đường chuẩn của (P) bằng $\frac{1}{2}$MN. Từ đó, có nhận xét gì về đường tròn đường kính MN ?

Giải

Gọi MN là dây cung của parabol đi qua tiêu điểm F.

Giả sử parabol có phương trình chính tắc và có đồ thị như hình vẽ bên.

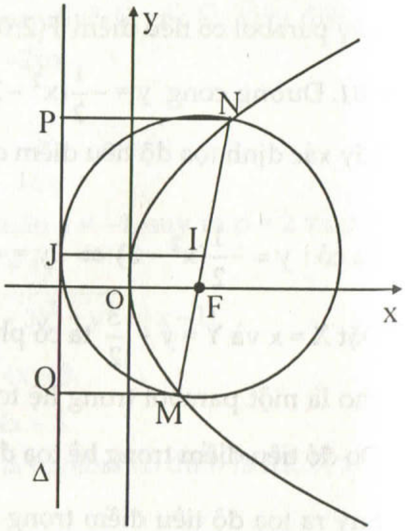
Hình thang vuông MNPQ có IJ là đường trung bình nên

$d(I,\Delta)=IJ=\frac{1}{2}(MQ+NP)$.

Ta có MN đi qua tiêu điểm F của parabol và M, N thuộc parabol, nên

$MQ+NP=MF+NF=MN$.

Suy ra $d(I;\Delta)=\frac{1}{2}MN$.



Vậy đường tròn đường kính MN tiếp xúc với đường chuẩn Δ.

Bài 64*. Cho parabol (P): $y^2=16x$ và điểm A(1; 4). Gọi B, C là hai điểm di động trên (P) sao cho AB ⊥ AC (B, C không trùng với O). Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

(Trích đề TSĐH khối D–2008)

Giải

Cho B, C $\in$ (P) $\Rightarrow B\left(\frac{b^2}{16};b\right), C\left(\frac{c^2}{16};b\right)$ $(b\neq c, b\neq 4, c\neq 4)$.

$\overline{AB}=\left(\frac{b^2}{16}-1;b-4\right)$, $\overline{AC}=\left(\frac{c^2}{16}-1;c-4\right)$

$AB\perp AC \Leftrightarrow \overline{AB}.\overline{AC}=0 \Leftrightarrow (b+4)(c+4)+256=0 \Leftrightarrow b+c=-\left(68+\frac{bc}{2}\right)$

Đường thẳng BC qua $B\left(\frac{b^2}{16};b\right), C\left(\frac{c^2}{16};b\right)$

có 1 vectơ chỉ phương $\overline{BC}=\frac{c-b}{16}(c+b;16)$ nên có phương trình

$16\left(x-\frac{b^2}{16}\right)-(b+c)(y-b)=0 \Leftrightarrow 16x-(b+c)y+bc=0$. (*)

(*) $\Leftrightarrow 4(4x+17y)-bc\left(\frac{y}{4}+1\right)=0$.

Do đó BC luôn qua điểm cố định thoả $\begin{cases}4x+17y=0\\ \frac{y}{4}+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=17\\ y=-4\end{cases}$.

Vậy đường thẳng BC luôn đi qua điểm cố định $(17;-4)$.

C. LUYỆN TẬP

- **Xác định các yếu tố của parabol**

3.134. Cho parabol $y^2=2px$ $(p>0)$ có tiêu điểm F và đường chuẩn Δ

Hãy hoàn chỉnh các câu sau đây:

a) Hoành độ của tiêu điểm F là…. và đường chuẩn Δ cách gốc tọa độ O một khoảng là…..

b) Khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn là…

c) Ox là…… của parabol.

d) Nếu M là điểm trên parabol thì M cách đều…….và………..

Hướng dẫn giải

a) Hoành độ của tiêu điểm F là $\frac{p}{2}$ và đường chuẩn Δ cách gốc tọa độ O một khoảng là $\frac{p}{2}$

b) Khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn là p.

c) Ox là trục của parabol.

d) Nếu M là điểm trên parabol thì M cách đều F và Δ

3.135. Hãy điền tham số tiêu, tọa độ tiêu điểm và phương trình đường chuẩn của các parabol sau đây

Parabol	Tham số tiêu p	Tiêu điểm F	Đường chuẩn Δ
$y^2 = 4x$			
$y^2 = 15x$			
$y^2 = x$			
$y^2 = \frac{x}{3}$			

Hướng dẫn giải

Parabol	Tham số tiêu p	Tiêu điểm F	Đường chuẩn Δ
$y^2 = 4x$	$p = 2$	$F(1;0)$	$x = -1$
$y^2 = 15x$	$p = \frac{15}{2}$	$F\left(\frac{15}{4};0\right)$	$x = -\frac{15}{4}$
$y^2 = x$	$p = \frac{1}{2}$	$F\left(\frac{1}{4};0\right)$	$x = -\frac{1}{4}$
$y^2 = \frac{x}{3}$	$p = \frac{1}{6}$	$F\left(\frac{1}{12};0\right)$	$x = -\frac{1}{12}$

3.136. Xét parabol (P) được cho ở phương trình chính tắc. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai ?

a) (P) : $y^2 = 20x$ có tiêu điểm $F(20;0)$

b) Nếu (P) có tham số tiêu $p = \frac{1}{2}$ thì đường chuẩn của nó là $4x + 1 = 0$

c) Nếu (P) có đường chuẩn $\Delta : 5x + 4 = 0$ thì tiêu điểm là $F\left(\frac{2}{5};0\right)$

d) Nếu (P) có tham số tiêu $p = 2\sqrt{2}$ thì khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn là $2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

b) và d) đúng. a) và c) sai.

- **Lập phương trình của parabol**

3.137. Hãy lập phương trình chính tắc của parabol trong mỗi trường hợp sau

a) Tham số tiêu $p = 5$;

b) Tiêu điểm $F\left(\frac{3}{2};0\right)$;

c) Đường chuẩn $\Delta : x + 2 = 0$;

d) Parabol qua điểm $M\left(4\sqrt{3};3\right)$.

Hướng dẫn giải

a) $y^2 = 10x$

b) $y^2 = 6x$

c) $y^2 = 8x$

d) $y^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}x$

3.138. Lập phương trình chính tắc của parabol trong các trường hợp sau

a) Parabol cắt đường thẳng d: $y = 3x$ tại hai điểm A, B mà $AB = 4\sqrt{2}$;

b) Parabol cắt elip $4x^2 + 6y^2 = 24$ tại hai điểm A,B mà $AB = 2$;

c) Parabol có một dây cung vuông góc với trục Ox có độ dài bằng 8 và khoảng cách từ tiêu điểm đến dây cung đó là $\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

a) $y^2 = \frac{36}{\sqrt{5}}x$

b) Do (P) và (E) đều đối xứng qua trục hoành nên A, B đối xứng qua trục hoành.

Từ đó do AB =2 nên $|y_A| = |y_B| = 1$. Như thế $x_A = x_B = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Phương trình chính tắc của (P) có dạng $y^2 = 2px, p > 0$.

Vì (P) qua $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};1\right)$ nên ta có $1 = 2p.\frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow p = \frac{\sqrt{2}}{6}$

Vậy phương trình của (P) là $y^2 = \frac{\sqrt{2}}{3}x$

c) Phương trình của (P) là $y^2 = 8\sqrt{2}x, y^2 = 4\sqrt{2}x$.

3.139. Sử dụng định nghĩa, hãy lập phương trình của parabol (P) trong các trường hợp sau:

a) Tiêu điểm $F(-1;0)$ và đường chuẩn $\Delta : x - y - 1 = 0$;

b) Tiêu điểm $F(0;2)$ và đường chuẩn $\Delta : y + 1 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) $M(x;y) \in (P) \Leftrightarrow MF = d(M;\Delta) \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-0)^2} = \frac{|x-y-1|}{\sqrt{1+1}}$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy + 6x - 2y + 1 = 0$. Đây là phương trình parabol cần tìm.

b) Tương tự câu a), ta có

$M(x;y) \in (P) \Leftrightarrow MF = d(M;\Delta) \Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = |y+1|$

$\Leftrightarrow x^2 - 6y + 3 = 0$: Đây là phương trình parabol cần tìm.

- **Điểm nằm trên parabol**

3.140. Cho parabol $y^2 = 8x$. Tìm điểm M nằm trên parabol sao cho

a) Khoảng cách từ M đến đường chuẩn là 3 ;

b) $4OM^2 = 5MF^2$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y^2 = 8x \Rightarrow 2p = 8 \Rightarrow p = 4$.

a) Ta có $d(M;\Delta) = MF = x + \frac{p}{2} = x + 2$.

Theo giả thiết $d(M;\Delta) = 3$ nên $x = 1$. Từ đó ta tính được $y = \pm 2\sqrt{2}$.

Vậy có hai điểm thoả mãn yêu cầu bài toán là $M\left(1; \pm 2\sqrt{2}\right)$.

b) Ta có $M(x;y) \in (P) \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 8x \\ MF = x + 2 \end{cases}$

Khi đó $4OM^2 = 5MF^2 \Leftrightarrow 4(x^2 + y^2) = 5(x+2)^2 \Leftrightarrow 4(x^2 + 8x) = 5(x^2 + 4x + 4)$

hay $x^2 - 12x + 20 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 10$.

Từ đó ta tìm được 4 điểm thoả mãn ycbt là $M(2; \pm 4),\ N\left(10; \pm 4\sqrt{5}\right)$.

3.141. Cho parabol (P) $y^2 = 16x$ và đường thẳng d: $4x - y - 8 = 0$.

a) Chứng minh rằng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B.

b) Tìm điểm M trên cung AB của parabol sao cho diện tích tam giác MAB lớn nhất.

Hướng dẫn giải

a) Toạ độ giao điểm của (P) và d là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y^2 = 16x \\ 4x - y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y^2}{16} \\ \dfrac{y^2}{4} - y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -4, x = 1 \text{ hoặc } y = 8, x = 4$$

Vậy d cắt (P) tại hai điểm A(1;-4), B(4;8).

b) Gọi M là điểm nằm trên cung AB của parabol.

Khi đó $M\left(\frac{y^2}{16}; y\right)$ với $-4 \le y \le 8$. Hạ $MH \perp AB$. Ta có

$$MH = d(M,d) = \frac{\left|4.\frac{y^2}{16} - y - 8\right|}{\sqrt{16+1}} = \frac{\left|\frac{y^2}{4} - y - 8\right|}{\sqrt{17}} = \frac{|(y+4)(y-8)|}{4\sqrt{17}} = \frac{(y+4)(8-y)}{4\sqrt{17}}$$

Áp dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân ta có

$$\sqrt{(y+4)(8-y)} \le \frac{y+4+8-y}{2} = 6 \Rightarrow (y+4)(8-y) \le 36$$

Vậy $MH \le \frac{9}{\sqrt{17}}$.

Ta có diện tích tam giác MAB lớn nhất $\Leftrightarrow$ MH lớn nhất

$$\Leftrightarrow MH = \frac{9}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow y + 4 = 8 - y \Leftrightarrow y = 2$$

Từ đó ta có điểm M thoả mãn yêu cầu bài toán là $M\left(\frac{1}{4}; 2\right)$.

3.142. Cho parabol (P): $y^2 = 18x$ và d là đường thẳng có hệ số góc $k \ne 0$ luôn đi qua tiêu điểm của parabol.

a) Chứng minh rằng d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.

b) Chứng minh tích các khoảng cách từ A và B đến trục của parabol là một hằng số.

Hướng dẫn giải

a) Toạ độ giao điểm của (P) và d là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y^2 = 18x \\ y = k\left(x - \dfrac{9}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 18x \\ x = \dfrac{y}{k} + \dfrac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow y^2 = 18\left(\frac{y}{k} + \frac{9}{2}\right)$$

hay $2ky^2 - 9y - 162k = 0$. Ta có $\Delta = 81 - 4(2k)(-81k) = 81(1 + 8k^2) > 0\ \forall k \ne 0$

Do đó phương trình trên luôn có hai nghiệm phân biệt và do đó d luôn cắt (P) tại hai điểm A, B phân biệt.

b) Ta thấy tung độ y_A, y_B của hai điểm A, B là nghiệm của phương trình trên.

Do đó $y_A.y_B = \frac{-162k}{2k} = -81$. Như thế, tích các khoảng cách từ A và B đến trục hoành là $|y_A||y_B| = |y_A.y_B| = 81$ (không đổi).

- **Tập hợp điểm là parabol–Dạng toán liên quan đến Parabol**

3.143. Cho F(2 ; 0) và đường thẳng $\Delta: x + 2 = 0$. Tìm tập hợp những điểm M trên mặt phẳng sao cho khoảng cách từ đó đến F bằng khoảng cách từ đó đến (Δ).

Hướng dẫn giải

Giải tương tự bài 3.139, ta được tập hợp điểm M là parabol có phương trình $y^2 = 8x$.

3.144. Cho đường thẳng Δ cố định và điểm F cố định không nằm trên Δ. Tìm tập hợp tâm M của các đường tròn qua F và tiếp xúc với Δ.

Hướng dẫn giải

Rõ ràng MF = d(M; Δ) ⇒ tập hợp các điểm M là parabol nhận F làm tiêu điểm và Δ làm đường chuẩn .

3.145. Cho parabol (P) : $y^2 = \frac{1}{2}x$. Gọi M, N là hai điểm di động trên (P) sao cho $OM \perp ON$ (M, N không trùng với O). Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải

Giả sử $M(x_M ; y_M)$, $N(x_N ; y_N)$ là hai điểm thoả mãn điều kiện để bài. Do M, N không trùng với O nên các số x_M, y_M, x_N, y_N đều khác 0. Vì M, N là hai điểm nằm trên (P) nên ta có $x_M = 2y_M^2$, $x_N = 2y_N^2$.

Mà $OM \perp ON$ nên $x_Mx_N + y_My_N = 0$, suy ra

$(2y_M^2)(2y_N^2) + y_My_N = 0 \Leftrightarrow y_My_N(4y_My_N + 1) = 0$, do đó

$$y_My_N = -\frac{1}{4}. \qquad (1)$$

Dễ dàng thấy được phương trình đường thẳng MN là

$$(y_N - y_M)x - (x_N - x_M)y + y_Mx_N - y_Nx_M = 0$$
$$\Leftrightarrow (y_N - y_M)\left[x - 2(y_N + y_M)y + 2y_My_N\right] = 0. \qquad (2)$$

Giả sử $y_N - y_M = 0$, ta suy ra $y_N = y_M$, từ đó, $x_N = x_M$, tức là M trùng N, trái giả thiết để bài. Như vậy $y_N - y_M \neq 0$, do đó (2) trở thành

$$x - 2(y_N + y_M)y + 2y_My_N = 0. \qquad (4)$$

Sau cùng, kết hợp (4) với (1), ta được phương trình đường thẳng MN là

$$x - 2(y_N + y_M)y - \frac{1}{2} = 0. \qquad (5)$$

Cho y = 0 trong (5), ta có $x = \frac{1}{2}$. Như vậy, đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

---

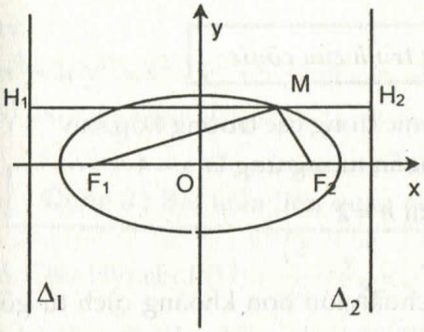
§7. BA ĐƯỜNG CÔNIC

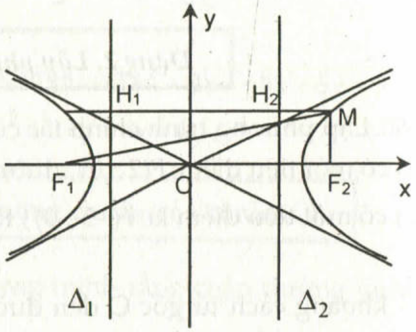
A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Đường chuẩn của elip và hypebol

Cho Elip (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b > 0)$ hoặc hypebol (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a, b > 0)$

- $\Delta_1 : x = -\frac{a}{e}$ là *đường chuẩn của* (E) (hoặc (H)) ứng với tiêu điểm $F_1(-c; 0)$;
- $\Delta_2 : x = \frac{a}{e}$ là *đường chuẩn của* (E) (hoặc (H)) ứng với tiêu điểm $F_2(c; 0)$.





2. Định nghĩa cônic

Cho đường thẳng cố định Δ không qua điểm cố định F. Tập hợp các điểm M sao cho tỉ số $\frac{MF}{d(M;\Delta)} = e$ (e > 0 không đổi) được gọi là một đường cônic.

- F gọi là tiêu điểm, Δ gọi là đường chuẩn.
- e < 1 thì cônic là elip ; e = 1 thì cônic là parabol ; e > 1 thì cônic là hypebol.

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 1. Viết phương trình đường chuẩn của cônic

Bài 65. Viết phương trình đường chuẩn của các cônic có phương trình sau đây

a) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1$ b) $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$ c) $y^2 = 2\sqrt{5}x$

Giải

a) Cônic là đường elip. Ta có $a^2 = 5,\ b^2 = 1 \Rightarrow c^2 = 4$

Vậy $a = \sqrt{5},\ b = 1,\ c = 2$. Từ đó tâm sai của elip là $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Phương trình các đường chuẩn của elip là $x = \frac{5}{2}, x = -\frac{5}{2}$.

b) Cônic là đường hyperbol . Ta có $a^2 = 7, b^2 = 9 \Rightarrow c^2 = 16$

Từ đó $a = \sqrt{7}, b = 3, c = 4$. Vậy tâm sai của hyperbol là $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{\sqrt{7}}$.

Phương trình các đường chuẩn của hyperbol là $\Delta_1 : x = \frac{7}{4}, \Delta_2 : x = -\frac{7}{4}$.

c) Cônic là đường parabol có tham số tiêu $p = \sqrt{5}$. Từ đó phương trình đường chuẩn của parabol là $\Delta : x + \frac{\sqrt{5}}{2} = 0$.

Dạng 2. Lập phương trình của cônic

Bài 66. Lập phương trình chính tắc của cônic trong các trường hợp sau

a) (C) có một tiêu điểm $F(2 ; 0)$, đường chuẩn tương ứng là $x = 4$.

b) (C) có một tiêu điểm là $F(-5 ; 0)$, tâm sai $e = 2$.

Giải.

a) Vì khoảng cách từ gốc O đến đường chuẩn lớn hơn khoảng cách từ gốc O đến tiêu điểm nên cônic đã cho là elip.

Phương trình chính tắc của elip có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a > b > 0$

Ta có $F(2 ; 0) \Rightarrow c = 2$.

Phương trình đường chuẩn là $x = 4$ nên $4 = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c} \Rightarrow a^2 = 4c = 8$.

Từ đó $b^2 = a^2 - c^2 = 8 - 4 = 4$.

Vậy phương trình chính tắc của cônic là $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

b) Vì tâm sai $e = 2 > 1$ nên cônic là hypebol.

Phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$.

Ta có $F(-6 ; 0) \Rightarrow c = 6$. Từ đó $e = 2 = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{c}{e} = 3$.

Như thế $b^2 = c^2 - a^2 = 36 - 9 = 27$.

Vậy phương trình chính tắc của cônic là $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$.

Bài 67. Viết phương trình cônic nhận gốc tọa độ O làm tiêu điểm, nhận đường thẳng $\Delta : x - y + 3 = 0$ làm đường chuẩn và có tâm sai $e = \frac{1}{3}$.

Giải

Gọi $M(x;y)$ là điểm nằm trên cônic. Khi đó $\frac{OM}{d(M;\Delta)} = \frac{1}{3}$

Ta có $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$,$d(M;\Delta) = \frac{|x - y + 3|}{\sqrt{1+1}}$

Do đó $\frac{OM}{d(M;\Delta)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3OM = d(M;\Delta) \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{|x - y + 3|}{\sqrt{2}}$

Hay

$18x^2 + 18y^2 = x^2 + y^2 + 9 - 2xy + 6x - 6y \Leftrightarrow 17x^2 + 17y^2 + 2xy - 6x + 6y - 9 = 0$

Vậy phương trình của cônic là $17x^2 + 17y^2 + 2xy - 6x + 6y - 9 = 0$.

Dạng 3 : Bài toán liên quan đến đường chuẩn của cônic (C).

Bài 68. Cho Hypebol (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Chứng minh rằng chân đường vuông góc hạ từ một tiêu điểm của (H) đến hai đường tiệm cận nằm trên đường chuẩn.

Giải

$\Delta_1 : x = -\frac{a}{e}$ là *đường chuẩn của* (H) ứng với tiêu điểm $F_1(-c; 0)$

$\Delta_2 : x = \frac{a}{e}$ là *đường chuẩn của* (H) ứng với tiêu điểm $F_2(c ; 0)$.

Hai đường tiệm cận có phương trình $T_1 : y = \frac{b}{a}x$ và $T_2 : y = -\frac{b}{a}x$.

Ta sẽ chứng minh rằng chân đường vuông góc hạ từ tiêu điểm F_2 đến đường tiệm cận T_1 thì nằm trên đường chuẩn $\Delta_2 : x = \frac{a}{e}$.

Giao điểm của T_1 và Δ_2 là $M\left(\frac{a}{e} ; \frac{b}{a}.\frac{a}{e}\right) = \left(\frac{a^2}{c} ; \frac{ba}{c}\right)$. Từ đó :

$\overrightarrow{F_2M} = \left(\frac{a^2}{c} - c ; \frac{ba}{c}\right) = \left(-\frac{c^2 - a^2}{c} ; \frac{ba}{c}\right) = \left(-\frac{b^2}{c} ; \frac{ba}{c}\right)$.

Ta lại có $T_1 : y = \frac{b}{a}x \Leftrightarrow bx - ay = 0$, do đó, một trong các vectơ chỉ phương của T_1 là $\vec{u} = (a ; b)$. Như thế, $\overrightarrow{F_2M}.\vec{u} = -\frac{b^2}{c}.a + \frac{ba}{c}.b = 0$.

Vì vậy, đường thẳng F_2M vuông góc với T_1 tại điểm M, giao điểm của T_1 và đường chuẩn Δ_2. Suy ra điều phải chứng minh.

Hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được chân đường vuông góc hạ từ tiêu điểm F_1 đến đường tiệm cận T_2 thì nằm trên đường chuẩn Δ_1.

C. LUYỆN TẬP

3.146. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai ?

a) Nếu điểm M nằm trên cônic thì khoảng cách từ đó đến tiêu điểm và đường chuẩn tương ứng bằng nhau.

b) Cônic và tiêu điểm của nó luôn nằm một phía đối với đường chuẩn tương ứng với tiêu điểm đó.

c) Đường chuẩn của một cônic thì không cắt cônic đó

d) Đường chuẩn của một cônic có phương trình chính tắc song song thì với trục hoành.

e) Nếu hai cônic có tiêu điểm trùng nhau và đường chuẩn trùng nhau thì hai cônic đó trùng nhau.

g) Nếu hai cônic có đường chuẩn trùng nhau và tiêu điểm tương ứng trùng nhau thì tâm sai của chúng cũng trùng nhau.

Hướng dẫn giải

b), c) đúng ; a), d), e), g) sai.

3.147. Hãy điền tọa độ tiêu điểm và phương trình đường chuẩn của các cônic vào bảng sau :

Cônic	Tiêu điểm	Đường chuẩn
$y^2 = 20x$		
$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1$		
$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$		

Hướng dẫn giải

Cônic	Tiêu điểm	Đường chuẩn
$y^2 = 20x$	$F(10; 0)$	$x = -10$
$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1$	$F(\pm 2; 0)$	$x = \pm\frac{5}{2}$
$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$	$F\left(\pm 2\sqrt{3}; 0\right)$	$x = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$

3.148. Viết phương trình chính tắc của cônic trong mỗi trường hợp sau :

a) Tiêu điểm $F(-3;0)$ và tâm sai $e = 2$;

b) Một đỉnh là $A(4 ; 0)$ và tâm sai $e = \frac{1}{3}$;

c) Phương trình đường chuẩn là $x = -5$ và tâm sai $e = 1$;

d) Một đỉnh là $A(4 ; 0)$ và một tiêu điểm là $F(5 ; 0)$.

Hướng dẫn giải

a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$; b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{\frac{128}{9}} = 1$; c) $y^2 = 20x$; d) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

3.149. Cho hai điểm $A(-3; 0)$, $B(3; 0)$. Tìm tập hợp những điểm M trên mặt phẳng tọa độ sao cho tích các hệ số góc của hai đường thẳng qua A, M và qua B, M là một hằng số $k \neq 0$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $M(x; y)$ là điểm thoả mãn yêu cầu bài toán. Khi đó dễ thấy rằng $x \neq \pm 3$. Ta có $\overline{AM} = (x+3; y)$, $\overline{BM} = (x-3; y)$. Từ đó ta thấy hệ số góc của đường thẳng qua A, M là $k_1 = \frac{y}{x+3}$ và hệ số góc của đường thẳng qua B, M là $k_2 = \frac{y}{x-3}$. Theo giả thiết ta có

$$k_1.k_2 = k \Leftrightarrow \frac{y^2}{x^2-9} = k \Leftrightarrow y^2 = k(x^2-9) \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9k} = 1.$$

Vậy tập hợp các điểm M là một cônic. Cônic này là elip nếu $k > 0$, là hypebol nếu $k < 0$.

3.150. Viết phương trình của cônic trong các trường hợp sau đây :

a) Tiêu điểm $F(0 ; -1)$, đường chuẩn là trục Ox, tâm sai $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) Tiêu điểm $F(0 ; 1)$, đường chuẩn $\Delta : x + y - 1 = 0$, tâm sai $e = 3$

c) Tiêu điểm $F(-1 ; 1)$, đường chuẩn $\Delta : x + y + 2 = 0$, tâm sai $e = 1$

Hướng dẫn giải

a) Lấy $M(x ; y)$ là điểm tùy ý trên cônic. Khi đó ta có

$$\frac{MF}{d(M,\Delta)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{(0-x)^2 + (-1-y)^2} = \frac{|y|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y + 1 = \frac{y^2}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + y^2 + 4y + 2 = 0.$$

Vậy phương trình của cônic đã cho là $2x^2 + y^2 + 4y + 2 = 0$.

b) Giải tương tự câu a), ta được : $7x^2+7y^2+18xy-18x-14y-2=0$

c) Giải tương tự câu a), ta được : $x^2+y^2-2xy-8y+4=0$

1.151. Cho $a>0$. Xét tập hợp (C) các điểm $M(x;y)$ thoả mãn hệ thức

$$(1-a)x^2+y^2+2ax-a=0.$$

Chứng minh rằng (C) là một đường cônic.

Hướng dẫn giải

Giả sử $M(x\,;\,y)$ là điểm thoả mãn $(1-a)x^2+y^2+2ax-a=0$

Khi đó $x^2+y^2=a(x-1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{a}\,|x-1|$

Xét đường thẳng $\Delta: x-1=0$

Ta có $OM^2=x^2+y^2$. Và $d(M,\Delta)=|x-1|$

Do đó $OM=\sqrt{a}.d(M,\Delta) \Leftrightarrow \dfrac{OM}{d(M,\Delta)}=\sqrt{a}$

- $0<a<1 \Rightarrow 0<\sqrt{a}<1$: (C) là một elip;
- $a=1 \Rightarrow \sqrt{a}=1$: (C) là một parabol;
- $a>1 \Rightarrow \sqrt{a}>1$: (C) là một hyperbol;

Vậy với mọi $a>0$ thì (C) luôn là một đường conic.

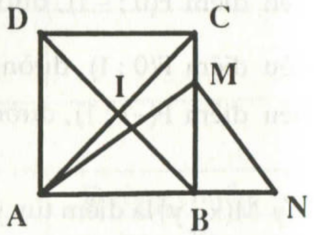
§8. BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG III

3.152. Cho A(2;1), M(6;–3). Hình vuông ABCD có M là điểm trên cạnh BC sao cho MB = 3MC. Hãy xác định tọa độ các điểm B, C, D.

Hướng dẫn giải

Trước hết có $\overrightarrow{AM}=(4;-4)$

$\Rightarrow AM=|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{4^2+(-4)^2}=4\sqrt{2}$



Đường thẳng qua M vuông góc với AM cắt AB tại N. Khi đó tam giác ABM đồng dạng với tam giác BNM.

Do đó $\dfrac{MN}{AM}=\dfrac{BM}{AB}=\dfrac{3}{4} \Rightarrow MN=\dfrac{3}{4}AM=3\sqrt{2}$

Phương trình đường thẳng MN là $4(x-6)-4(y+3)=0$ hay $x-y-9=0$

Giả sử N(a ; b). Khi đó $a-b-9=0 \Rightarrow b=a-9 \Rightarrow N(a\,;\,a-9)$

Ta có $MN^2=18 \Leftrightarrow (a-6)^2+(a-9+3)^2=18 \Leftrightarrow a=9$ hoặc $a=3$.

- $a=9$: Ta có N(9 ; 0) .

Phương trình đường thẳng AN là $x+7y-9=0$. Đường thẳng BC qua M và vuông góc với AN nên có phương trình $7x-y-45=0$

Tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases}x+7y-9=0\\7x-y-45=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{162}{25}\\y=\dfrac{9}{25}\end{cases}$

Vậy $B\left(\dfrac{162}{25};\dfrac{9}{25}\right)$

Ta lại có $\overrightarrow{CB}=4\overrightarrow{CM} \Rightarrow C\left(\dfrac{196}{25};\dfrac{-103}{25}\right)$.

Gọi I là trung điểm AC. Khi đó $I\left(\dfrac{123}{25};\dfrac{-39}{25}\right)$

Nhưng I cũng là trung điểm của BD nên $\begin{cases}x_D=2x_I-x_B=\dfrac{84}{25}\\y_D=2y_I-y_B=-\dfrac{87}{25}\end{cases}$

Vậy $D\left(\dfrac{84}{25};-\dfrac{87}{25}\right)$.

- Tương tự, bạn đọc tự xét trường hợp a = 3.

3.153. Cho $d_1: x+y-3=0$, $d_2: x+y-9$ và điểm A(3;2). Tìm điểm B trên d₁, điểm C trên d₂ sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Hướng dẫn giải

Ta có B(b; 3–b), C(c;9–c).

Khi đó $\overrightarrow{AB}=(b-3;b-1)$, $\overrightarrow{AC}=(c-3;c-7)$

Từ giả thiết ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\\|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(b-3)(c-3)+(b-1)(c-7)=0\\(b-3)^2+(b-1)^2=(c-3)^2+(c-7)^2\end{cases}$

Đặt $u=b-2, v=c-5 \Rightarrow \begin{cases}(u-1)(v+2)+(u+1)(v-2)=0\\(u-1)^2+(u+1)^2=(v+2)^2+(v-2)^2\end{cases}$

Từ đó

$$\begin{cases}2uv-4=0\\2u^2+2=2v^2+8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v=\dfrac{2}{u}\\u^2+1=\dfrac{4}{u^2}+4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v=\dfrac{2}{u}\\u^4-3u^2-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v=\dfrac{2}{u}\\u^2=4\end{cases}$$

- Với u = 2, ta được v = 1. Khi đó b = 4, c = 6.

Ta có B(4; –1), C(6; 3).

- Với $u=-2$ ta được $v=-1$. Khi đó $b=0$, $c=4$.

  Ta có $B(0;3)$, $C(4;5)$.

3.154. Cho 4 điểm $M(3;4), N(8;-1), P(9;2), Q(2;1)$. Viết phương trình các cạnh của hình vuông ABCD biết các đường thẳng AB, BC, CD, DA lần lượt đi qua các điểm M, N, P, Q.

Hướng dẫn giải

Phương trình đường thẳng AB qua M là

$$a(x-3)+b(y-4)=0\ (a^2+b^2>0) \Leftrightarrow ax+by-3a-4b=0$$

Phương trình đường thẳng CD qua P là

$$a(x-9)+b(y-2)=0 \Leftrightarrow ax+by-9a-2b=0$$

Vì BC qua N và BC vuông góc AB nên phương trình của đường thẳng BC là

$$b(x-8)-a(y+1)=0 \Leftrightarrow bx-ay-8b-a=0$$

Tương tự, phương trình AD là $bx-ay-2b+a=0$

Vì ABCD là hình vuông nên

$$d(M,CD)=d(Q,BC) \Leftrightarrow \frac{|3a+4b-9a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2b-a-8b-a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow |-7a+2b|=|-2a-6b| \Leftrightarrow -7a+2b=-2a-6b \text{ hoặc } -7a+2b=-(-2a-6b)$$

Hay $5a=8b$ (chọn $a=8, b=5$) hoặc $9a=-4b$ (chọn $a=4, b=-9$)

Từ đó ta có phương trình của 4 cạnh hình vuông là

$(AB): 8x+5y-44=0, (BC): 5x-8y-48=0;$

$(CD): 8x+5y-82=0, (AD): 5x-8y-2=0.$

Hoặc $(AB): 4x-9y+24=0, (BC): 9x+4y-68=0;$

$(CD): 4x-9y-18=0, (AD): 9x+4y-22=0.$

3.155. Cho hai đường thẳng $d: x-3y+8=0$, $d': x-3y-4=0$ và $I(3;2)$.

a) Viết phương trình đường thẳng Δ qua I và vuông góc với d và d'. Tìm tọa độ giao điểm H, K của Δ với d và d'.

b) Chứng minh rằng điểm I nằm trong phần mặt phẳng nằm giữa hai đường thẳng song song d và d'.

b) Một hình thang cân nhận I làm giao điểm hai đường chéo và nhận $M\left(\frac{49}{10};\frac{23}{10}\right)$ làm trung điểm một cạnh bên. Xác định tọa độ các đỉnh của hình thang.

Hướng dẫn giải

Dễ thấy d và d' song song với nhau. Đường thẳng Δ vuông góc với d nên phương trình có dạng $3x+y+C=0$.

Vì Δ qua I nên $3.3+2+C=0 \Rightarrow C=-11$.

Do đó phương trình Δ là $3x+y-11=0$

Tọa độ giao điểm của Δ và d là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-3y+8=0 \\ 3x+y-11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=\frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$$

Tọa độ giao điểm của Δ và (d') là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-3y-4=0 \\ 3x+y-11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{37}{10} \\ y=\frac{-1}{10} \end{cases}$

Vậy $K\left(\frac{37}{10};\frac{-1}{10}\right)$

b) Ta có $\overrightarrow{IH}=\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ và $\overrightarrow{IK}=\left(\frac{7}{10};-\frac{21}{10}\right)$. Suy ra $\overrightarrow{IK}=-\frac{7}{5}\overrightarrow{IH}$

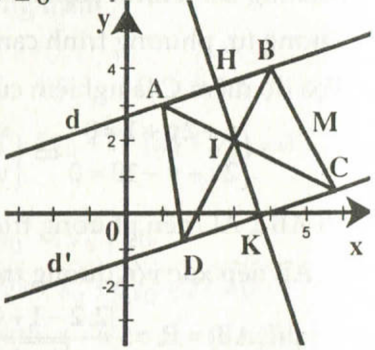
Vậy I nằm giữa H, K. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

c) Giả sử hình thang ABCD (AB // CD) có A,B nằm trên d; C, D nằm trên d', M là trung điểm BC. Khi đó H, K lần lượt là trung điểm AB, CD.

Ta có MH // AC và MK // BD.

$$\overrightarrow{MH}=\left(-\frac{12}{5};\frac{6}{5}\right), \overrightarrow{MK}=\left(-\frac{6}{5};\frac{-12}{5}\right)$$

Đường chéo AC qua I và nhận $\overrightarrow{MH}$ hay $\vec{u}=(-2;1)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình $\frac{x-3}{-2}=\frac{y-2}{1} \Leftrightarrow x+2y-7=0$



Tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+2y-7=0 \\ x-3y+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow A(1;3)$$

Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x+2y-7=0 \\ x-3y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{29}{5} \\ y=\frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{29}{5};\frac{3}{5}\right)$$

Tương tự ta tìm được tọa độ của B và D là $B(4;4), D\left(\frac{8}{5};-\frac{4}{5}\right)$.

3.156. Chứng minh các bất đẳng thức sau đây

a) $\sqrt{x^2-4x+13}+\sqrt{x^2-6x+10}>\sqrt{17}\ \forall x\in\mathbb{R}$

b) $(x-1)\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\le\sqrt{x^2-2x+2}\ \ \forall x\in[0;1]$

Hướng dẫn giải

a) Với mỗi số thực x, ta xét hai vectơ $\vec{a}=(x-2;3),\vec{b}=(3-x;1)$.

Khi đó $\vec{a}+\vec{b}=(1;4)$.

Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{a}|+|\vec{b}|\ge|\vec{a}+\vec{b}|$, ta có:

$$\sqrt{x^2-4x+13}+\sqrt{x^2-6x+10}\ge\sqrt{17}\ \forall x\in\mathbb{R}$$

b) Với mỗi $x\in[0;1]$ ta xét các vectơ $\vec{a}=(x-1;1),\vec{b}=(\sqrt{x};\sqrt{1-x})$

Khi đó $\quad|\vec{a}|=\sqrt{(x-1)^2+1}=\sqrt{x^2-2x+2}\quad,|\vec{b}|=\sqrt{x+1-x}=1$

Ta có $\quad\vec{a}.\vec{b}=(x-1)\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$

Theo định nghĩa tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})\Rightarrow\vec{a}\vec{b}\le|\vec{a}||\vec{b}|$

Từ đó ta có $(x-1)\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\le\sqrt{x^2-2x+2}$

3.157. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường tròn nội tiếp tam giác có phương trình $x^2+y^2-4x-2y=0$ tiếp xúc với cạnh AC tại điểm $M(1;-1)$, tiếp xúc với cạnh BC tại $N(4;2)$. Xác định tọa độ của các điểm A, B, C.

Hướng dẫn giải

Đường tròn nội tiếp có tâm $I(2;1)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.

* Ta có $IM\perp AC$ nên AC có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IM}=(-1;-2)$. Như thế phương trình cạnh AC là $-1(x-1)-2(y+1)=0\Leftrightarrow x+2y+1=0$

Tương tự, phương trình cạnh BC là $2x+y-10=0$.

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x+2y+1=0\\2x+y-10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=7\\y=-4\end{cases}\Rightarrow C(7;-4)$$

* Vì $AB\perp AC$ nên phương trình AB có dạng $2x-y+C=0$

AB tiếp xúc với đường tròn nên

$$d(I,AB)=R\Leftrightarrow\frac{|2{,}2-1+C|}{\sqrt{4+1}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow|C+3|=5$$

$$\Leftrightarrow C+3=5\text{ hoặc }C+3=-5\Leftrightarrow C=2\text{ hoặc }C=-8$$

Phương trình cạnh AB là $2x-y+2=0$ hoặc $2x-y-8=0$

Nếu AB có phương trình $2x-y+2=0$ thì

$$(2x_I-y_I+2)(2x_C-y_C+2)=(2.2-1+2)(2.7+4+2)>0$$

Suy ra tâm I và điểm C nằm cùng phía đối với AB.

Do đó phương trình AB là $2x-y+2=0$

Không xảy ra trường hợp AB có phương trình $2x-y-8=0$

Từ đó ta tìm được tọa độ $A(3;-2),B\left(\frac{9}{2};1\right)$.

3.158. Cho đường tròn (C): $x^2+y^2-4x+2y-20=0$ và đường thẳng $d:2x+y-5=0$.

a) Tìm tọa độ giao điểm của (C) và d. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại các giao điểm trên.

b) Chứng minh rằng từ điểm M(3 ; 5) có thể kẻ được hai tiếp tuyến đến đường tròn. Tính khoảng cách từ M đến đường thẳng đi qua hai tiếp điểm.

Hướng dẫn giải

a) Tọa độ giao điểm của (C) và d là nghiệm của hệ $\begin{cases}x^2+y^2-4x+2y-20=0\\2x+y-5=0\end{cases}$

Từ đó ta tìm được hai giao điểm là $A\left(\frac{3}{5};\frac{19}{5}\right)$, $B(5;-5)$

Phương trình tiếp tuyến tại A là $-35x+120y-87=0$;

Phương trình tiếp tuyến tại A là $3x-4y-35=0$.

b) (C) có tâm $I(2;-1),R=5$.

Ta có $IM=\sqrt{(3-2)^2+(5+1)^2}=\sqrt{37}>5=R$. Như thế M nằm bên ngoài đường tròn và do đó qua M vẽ được hai tiếp tuyến đến đường tròn.

Gọi $T(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta có $\overrightarrow{IT}=(x_0-2;y_0+1)$. Tiếp tuyến tại T nhận $\overrightarrow{IT}$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình

$$(x_0-2)(x-x_0)+(y_0+1)(y-y_0)=0$$

Vì tiếp tuyến qua M nên

$$(x_0-2)(3-x_0)+(y_0+1)(5-y_0)=0\Leftrightarrow5x_0+4y_0-1-(x_0^2+y_0^2)=0$$

Vì T nằm trên đường tròn nên

$$x_0^2+y_0^2-4x_0+2y_0-20=0\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2=4x_0-2y_0+20$$

Do đó ta có $5x_0+4y_0-1-(4x_0-2y_0+20)=0\Leftrightarrow x_0+6y_0-21=0$

Vì tọa độ hai tiếp điểm thoả mãn phương trình $x+6y-21=0$ nên phương trình đường thẳng đi qua hai tiếp điểm là $x+6y-21=0$.

Từ đó khoảng cách từ M đến đường thẳng qua hai tiếp điểm là

$$d(M,\Delta)=\frac{|3+6.5-21|}{\sqrt{4+36}}=\frac{6}{\sqrt{10}}.$$

3.159*. Một đường tròn đi qua hai điểm A(2; 2), B(9; 9) và tiếp xúc với trục hoành tại điểm M $(x_M > 0)$.

a) Lập phương trình của đường tròn và tìm hoành độ của M.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại hai điểm A, B.

Hướng dẫn giải

a) Dễ thấy đường thẳng AB qua gốc tọa độ O có phương trình là y = x. Dễ dàng chứng minh được rằng

$OM^2 = OA.OB = 2\sqrt{2}.9\sqrt{2} = 36 \Rightarrow OM = 6$

Phương trình trung trực AB là x + y − 11 = 0. Gọi I là tâm đường tròn. Ta có IM vuông góc với trục hoành nên $x_I = 6$. Từ đó $y_I = 5$.

Vậy I(6 ; 5) và R = IA = 5. Suy ra phương trình đường tròn là

$$(x-6)^2 + (y-5)^2 = 25.$$

b) Phương trình tiếp tuyến tại A: $4x + 3y - 14 = 0$

Phương trình tiếp tuyến tại B: $3x + 4y - 63 = 0$

1.160. Cho họ đường cong $(C_m): x^2 + y^2 - 2mx + 4(m-1)y - 4 = 0$.

a) Chứng minh rằng với mọi m, (C_m) luôn là một đường tròn. Hãy xác định m để (C_m) là đường tròn có bán kính nhỏ nhất.

b) Xác định m để (C_m) chắn trên trục hoành một dây cung có độ dài $2\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

a) Xét $(C_m): x^2 + y^2 - 2mx + 4(m-1)y - 4 = 0$

Ta có $2a = -2m, 2b = 4(m-1), c = -4$. Suy ra

$a = -m, b = 2(m-1), c = -4 \Rightarrow a^2 + b^2 - c = m^2 + 4(m-1)^2 + 4 > 0 \, \forall m$

Do đó (C_m) luôn là đường tròn với mọi giá trị m.

Bán kính của đường tròn là $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} = \sqrt{5m^2 - 8m + 8}$.

Ta có

$$R = \sqrt{5m^2 - 8m + 8} = \sqrt{5\left(m^2 - \frac{8}{5}m + \frac{8}{5}\right)} = \sqrt{5\left[\left(m - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{24}{25}\right]} \geq \sqrt{\frac{24}{5}} = \frac{2\sqrt{30}}{5}$$

Vậy bán kính nhỏ nhất của đường tròn (C_m) là $\frac{2\sqrt{30}}{5}$ khi $m = \frac{4}{5}$

b) Hoàng độ giao điểm của (C_m) với trục hoành là nghiệm của phương trình $x^2 - 2mx - 4 = 0$. Ta thấy $\Delta' = m^2 + 4 > 0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Theo định lí Vi–et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = -4 \end{cases}$

Ta có $|x_1 - x_2| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 20 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 20$

Như vậy $4m^2 + 16 = 20 \Leftrightarrow m = \pm 1$

3.161. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy. Xét tam giác ABC vuông tại A phương trình đường thẳng BC là $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$, các đỉnh A, B thuộc trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

(Trích đề thi TSĐH khối A–2002)

Hướng dẫn giải

Vì B là giao điểm của BC với trục hoành nên B(1;0). Đường thẳng BC có hệ số góc là $\sqrt{3}$ nên trong tam giác ABC ta $\hat{B} = 60^0, \hat{C} = 30^0, \hat{A} = 90^0$.

Giả sử A(a; 0). Khi đó $C\left(a; a\sqrt{3} - \sqrt{3}\right)$.

Dễ thấy $AB = r\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}\right) \Rightarrow |a-1| = 2\left(1 + \sqrt{3}\right)$

- Với $a - 1 = 2\left(1+\sqrt{3}\right) \Rightarrow A\left(2\sqrt{3}+3; 0\right)$, B(1;0), $C\left(2\sqrt{3}+3; 6+2\sqrt{3}\right)$

  Từ đó ta có tọa độ trọng tâm G là $G\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{3}; \frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)$

- Với $a - 1 = -2\left(1+\sqrt{3}\right) \Rightarrow G\left(\frac{-1-4\sqrt{3}}{3}; \frac{-6-2\sqrt{3}}{3}\right)$

3.162. Cho elip (E): $3x^2 + 4y^2 = 12$.

a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $S = MF_1^3 + MF_2^3$ khi M thay đổi trên elip (E).

b) Một hình chữ nhật có các cạnh song song với các trục của elip và 4 đỉnh nằm trên elip. Hãy xác định hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Viết phương trình elip dưới dạng $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

Từ đó ta có $a^2 = 4, b^2 = 3, c^2 = 1 \Rightarrow a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1$.

a) $M(x;y) \in (E) \Rightarrow MF_1 = a + \frac{c}{a}x, MF_2 = a - \frac{c}{a}x$. Ta có

$$S = MF_1^3 + MF_2^3 = (MF_1 + MF_2)(MF_1^2 - MF_1.MF_2 + MF_2^2)$$

$$= 2a\left[(MF_1 + MF_2)^2 - 3MF_1.MF_2\right] = 2a\left[4a^2 - 3\left(a + \frac{cx}{a}\right)\left(a - \frac{cx}{a}\right)\right]$$

$$= 2a\left(a^2 + \frac{3c^2x^2}{a^2}\right)$$

Vì M thuộc elip nên $0 \le x^2 \le a^2$. Do đó $2a^3 \le S \le 2a(a^2+3c^2)$

Hay $16 \le S \le 28$.

Vậy: $\max S = 28$ khi $x^2 = a^2$ nghĩa là $M \equiv A_1$ hoặc $M \equiv A_2$;

$\min S = 16$ khi $x = 0$ nghĩa là $M \equiv B_1$ hoặc $M \equiv B_2$

b) Gọi MNPQ là hình chữ nhật nội tiếp trong elip có các cạnh song song với các trục của elip.

Xét điểm M(x; y) trên elip. Ta có thể xem rằng $x, y > 0$. Khi đó tọa độ các đỉnh còn lại là $N(-x;y), P(-x;-y), Q(x;-y)$. Hai kích thước của hình chữ nhật là 2x và 2y.

Do đó diện tích của hình chữ nhật là $S = 4xy$.

Ta có $3x^2 + 4y^2 = 12 \Rightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt{12-3x^2}$.

Từ đó $S = 2x\sqrt{12-3x^2} = 2\sqrt{3}.x\sqrt{4-x^2} = 2\sqrt{3}.\sqrt{x^2(4-x^2)}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô–si, ta có: $\sqrt{x^2(4-x^2)} \le \frac{x^2+4-x^2}{2} = 2$

Do đó $S \le 4\sqrt{3}$

Như thế $\max S = 4\sqrt{3}$ khi $x^2 = 4 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Khi đó 4 đỉnh của hình chữ nhật là $\left(\pm\sqrt{2}; \pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

3.163. Lập phương trình chính tắc của (E) biết (E) qua M(–2;–3) và có phương trình đường chuẩn là $x + 8 = 0$.

Hướng dẫn giải

Có hai elip thoả mãn là $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1, \frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{39} = 1$.

3.164. Cho elip (E) : $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{6} = 1$

a) Viết phương trình đường thẳng qua gốc tọa độ O, cắt elip tại A và B sao cho $AB = 4\sqrt{2}$.

b) M và N là hai điểm tùy ý trênelip sao cho $OM \perp ON$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2}$ là hằng số.

Hướng dẫn giải

Ta có $a^2 = 10, b^2 = 6, c^2 = 4$.

a) Gọi A, B là hai giao điểm. Vì (E) nhận gốc O làm tâm đối xứng nên A, B đối xứng qua gốc O. Do đó $OA = \frac{AB}{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow OA^2 = 8$

Giả sử $A(x;y)$. Khi đó $\begin{cases} \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{6} = 1 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 5 \\ y^2 = 3 \end{cases}$

Từ đó có $A\left(\pm\sqrt{5}; \pm\sqrt{3}\right)$ và phương trình đường thẳng d là $y = \pm\frac{\sqrt{15}}{5}x$.

b) Cho d: $y = kx$, d′ : $y = k'x$ cắt (E) tại M và N $(k' = -\frac{1}{k})$.

Tính được $OM^2 = \frac{a^2b^2(1+k^2)}{a^2k^2+b^2}, ON^2 = \frac{a^2b^2(1+k^2)}{a^2+b^2k^2}$.

Từ đó suy ra kết quả $\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = \frac{16}{60} = \frac{4}{15}$.

3.165. Cho hypebol $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$

a) Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm bất kì của hypebol đến hai tiệm cận là một hằng số.

b) Tính độ dài của phần đường tiệm cận bị chắn bởi hai đường chuẩn.

c) Chứng minh rằng chân đường vuông góc hạ từ tiêu điểm đến đường tiệm cận thì nằm trên đường chuẩn ứng với tiêu điểm đó.

Hướng dẫn giải

a) $M(x_0;y_0) \in (H) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

Phương trình hai đường tiệm cận $y = \pm\frac{b}{a}x \Leftrightarrow bx \pm ay = 0$

Khoảng cách từ M đến hai tiệm cận là $d_1 = \frac{|bx_o - ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}, d_2 = \frac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Do đó $d_1d_2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ (không đổi)

b) Độ dài phần đường tiệm cận bị chắn bởi hai đường chuẩn là 2a.

c) Gọi H là giao điểm của đường chuẩn $x - \frac{a}{e} = 0$ với đường tiệm cận $y = \frac{b}{a}x$.

Khi đó $H\left(\frac{a}{e}; \frac{b}{e}\right)$. Suy ra $\overrightarrow{F_2H} = \left(c - \frac{a}{e}; \frac{b}{e}\right)$

Vectơ chỉ phương của tiệm cận $y = \frac{b}{a}x$ là $\vec{u} = (a;b)$

Ta có $\overrightarrow{F_2H}.\vec{u} = a\left(c - \dfrac{a}{e}\right) + b.\dfrac{b}{e} = a\left(c - \dfrac{a^2}{c}\right) + \dfrac{ab^2}{c}$

$$= \frac{a(c^2 - a^2) + ab^2}{c} = \frac{-ab^2 + ab^2}{c} = 0$$

Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh.

3.166. Cho hypebol (H) : $x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1$. Gọi d và d′ là hai đường thẳng qua gốc tọa độ O có hệ số góc lần lượt là k và $-\dfrac{1}{k}(k \neq 0)$

a) Tìm điều kiện của k sao cho dvà d′ đều có điểm chung với (H).

b) Tính theo k diện tích hình thoi có 4 đỉnh là giao điểm của d, d′ với (H). Xác định k để diện tích đó nhỏ nhất

Hướng dẫn giải

a) Phương trình của d: $y = kx$; phương trình d′: $y = -\dfrac{x}{k}$

- Tọa độ giao điểm của d và (H) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ y = kx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4 - k^2)x^2 = 4 \\ y = kx \end{cases}$$

Để d có điểm chung với (H) thì hệ trên có nghiệm

Suy ra $4 - k^2 > 0 \Leftrightarrow k^2 < 4$

- Tương tự, để d′ có điểm chung với (H) thì $k^2 > \dfrac{1}{4}$

Vậy d và d′ đều có điểm chung với (H) khi $\dfrac{1}{4} < k^2 < 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < |k| < 2$

b) Độ dài hai đường chéo của hình thoi là $4\sqrt{\dfrac{1+k^2}{4-k^2}}$ và $4\sqrt{\dfrac{1+k^2}{4k^2-1}}$

Do đó, diện tích của hình thoi là

$$S = \frac{1}{2}.4\sqrt{\frac{1+k^2}{4-k^2}}.4\sqrt{\frac{1+k^2}{4k^2-1}} = \frac{8(1+k^2)}{\sqrt{(4-k^2)(4k^2-1)}}$$

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\sqrt{(4-k^2)(4k^2-1)} \le \frac{4 - k^2 + 4k^2 - 1}{2} = \frac{3(k^2+1)}{2}$$

Do đó $S \ge \dfrac{8(1+k^2)}{\dfrac{3}{2}(1+k^2)} = \dfrac{16}{3}$

Vậy $\min S = \dfrac{16}{3}$ khi $4 - k^2 = 4k^2 - 1 \Leftrightarrow k = \pm 1$

3.167. Cho hai đường thẳng $d_1 : 2x + y - 5 = 0$, $d_2 : x - 3y - 2 = 0$ và A(2 ; 0).

a) Viết phương trình đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng $x + y = 0$, tiếp xúc với d₁ và cắt d₂ theo một dây cung là AB mà $AB = R\sqrt{2}$ với R là bán kính đường tròn .

b) Tìm điểm A trên d₁ và điểm B trên d₂ sao cho tam giác MAB vuông cân tại A .

c) Viết phương trình chính tắc của hypebol nhận A làm tiêu điểm và có tâm sai là $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Tìm tọa độ giao điểm của hypebol với d₂.

d) Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng d₂ và (H).

Hướng dẫn giải

a) Gọi I(a; b) là tâm đường tròn thoả mãn yêu cầu bài toán.

Do I nằm trên đường thẳng y = −x nên b = − a

Theo giả thiết ta có: $d(I, d_1) = R \Leftrightarrow R = \dfrac{|2a + b - 5|}{\sqrt{5}}$ (1)

Mặt khác, nếu gọi M, N là giao điểm của đường tròn với (d₂) thì ΔIMN là tam giác cân tại I và $MN = R\sqrt{2}$. Từ đó suy ra tam giác IMN vuông cân tại I.

Như thế nếu gọi H là trung điểm của MN thì $IH = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

Suy ra $IH = d(I, d_1) = \dfrac{R\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{R\sqrt{2}}{2} = \dfrac{|a - 3b - 2|}{\sqrt{10}}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có $\dfrac{|2a + b - 5|}{\sqrt{5}} = 2\dfrac{|a - 3b - 2|}{\sqrt{20}} \Leftrightarrow |2a + b - 5| = |a - 3b - 2|$

Thay b = − a vào (3), có $|a - 5| = |4a - 2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - 5 = 4a - 2 \\ a - 5 = -4a + 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = \dfrac{7}{5} \end{array}\right.$

Từ đó ta có hai đường tròn thoả mãn yêu cầu bài toán là

$$(C_1) : (x+1)^2 + (y-1)^2 = \frac{6}{5} \text{ và } (C_2) : \left(x - \frac{7}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{5}\right)^2 = \frac{324}{125}$$

b) Ta có B(b; 5−2b) và C(3c+2;c) là hai điểm lần lượt nằm trên d₁, d₂.

Khi đó $\overrightarrow{AB} = (b - 2; 5 - 2b)$, $\overrightarrow{AC} = (3c; c)$

Tam giác ABC vuông cân tại A $\Leftrightarrow \begin{cases} AB \perp AC \\ AB = AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ AB^2 = AC^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3c(b-2) + c(5-2b) = 0 \\ (b-2)^2 + (5-2b)^2 = 10c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c(b-1) = 0 \\ 5b^2 - 24b + 29 = 10c^2 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được hai nghiệm $(b;c) = (1;1), (b;c) = (1;-1)$

Vì C có hoành độ dương nên $B(1;3)$, $C(5;1)$.

c) Phương trình chính tắc của hypebol (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$

(H) nhận A(2; 0) làm đỉnh nên a = 2.

Mặt khác $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow c = \sqrt{5}$. Từ đó $b^2 = c^2 - a^2 = 5 - 4 = 1$

Vậy phương trình chính tắc của (H) là $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

d) Tọa độ giao điểm của (H) và d_2 là nghiệm của hệ $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - y^2 = 1 \\ x - 3y - 2 = 0 \end{cases}$

Giải hệ trên, ta được hai nghiệm $(x;y) = (2;0)$, $(x;y) = \left(-\frac{12}{5}; -\frac{26}{5}\right)$

Vậy d_2 cắt (H) tại hai điểm $P(2;0), Q\left(-\frac{12}{5}; -\frac{26}{5}\right)$.

3.168. a) Viết phương trình chính tắc của parabol (P) sao cho (P) chắn trên đường thẳng x = 2 một đoạn có độ dài là 4.

b) Một hình thang cân có 4 đỉnh trên (P) , trục đối xứng của nó nằm trên trục hoành và giao điểm hai đường chéo là M(4;0). Biết tổng độ dài hai đáy của hình thang là $10\sqrt{2}$. Hãy tìm tọa độ 4 đỉnh của hình thang .

Hướng dẫn giải

a) Phương trình chính tắc của (P) là $y^2 = 2x$

b) Giả sử hình thang cân ABCD có AD // BC.

Ta có: $A\left(\frac{a^2}{2}; a\right), B\left(\frac{b^2}{2}; b\right), 0 < a < b$

Vì giao điểm hai đường chéo là M(4;0) nên ta có thể xem: $\frac{a^2}{2} < 4 < \frac{b^2}{2}$

Khi đó tổng độ dài hai đáy của hình thang là

$AD + BC = 2(a + b) = 10\sqrt{2} \Rightarrow a + b = 5\sqrt{2}$

Mặt khác, gọi H và K lần lượt là trung điểm AD và BC. Ta có

$$\frac{AH}{CK} = \frac{MH}{MK} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{4 - \frac{a^2}{2}}{\frac{b^2}{2} - 4} = \frac{8 - a^2}{b^2 - 8} \Rightarrow ab^2 - 8a = 8b - a^2b$$

$\Rightarrow ab(a + b) = 8(a + b) \Rightarrow ab = 8$

Suy ra a, b là nghiệm của phương trình $t^2 - 5\sqrt{2}t + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2} \\ t = 4\sqrt{2} \end{array}\right.$

Từ đó ta được $a = \sqrt{2}, b = 4\sqrt{2}$

Vậy tọa độ các đỉnh của hình thang là

$A\left(1; \sqrt{2}\right), B\left(16; 4\sqrt{2}\right), C\left(16; -4\sqrt{2}\right), D\left(1; -\sqrt{2}\right)$.

3.169. Cho parabol (P) : $y^2 = 8x$ có tiêu điểm F và điểm M(5 ; –6)

a) Viết phương trình đường thẳng d qua M, cắt (P) tại hai điểm B và C sao cho M là trung điểm đoạn BC.

b) Đường thẳng Δ qua M và F cắt (P) tai hai điểm A và D. Tính độ dài đoạn AD và viết phương trình đường tròn đường kính AD .

Hướng dẫn giải

a) Giả sử $B\left(\frac{b^2}{8}; b\right), C\left(\frac{c^2}{8}; c\right)$ nằm trên (P).

Do M là trung điểm đoạn BC nên ta có

$$\begin{cases} \frac{b^2}{8} + \frac{c^2}{8} = 2x_M \\ b + c = 2y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + c^2 = 80 \\ b + c = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = -12 \\ (b + c)^2 - 2bc = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = -12 \\ bc = 32 \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có nghiệm (b ; c) = (–4 ; –8) , (–8 ; –4). Từ đó ta có tọa độ hai điểm B, C là B(2;–4) và C(8;–8).

Suy ra phương trình đường thẳng d là $2x + y - 4 = 0$.

b) Parabol (P) có tiêu điểm F(2;0). Ta có $\overrightarrow{MF} = (-3;6)$

Phương trình đường thẳng Δ qua M, F là $\frac{x - 2}{-3} = \frac{y}{6} \Leftrightarrow 2x + y - 4 = 0$

Tọa độ giao điểm của Δ và (P) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y^2 = 8x \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4 - 2x)^2 = 8x \\ y = 4 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 2x & (1) \\ x^2 - 6x + 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

Phương trình $x^2 - 6x + 4 = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt $(\Delta' = 5 > 0)$ nên hệ luôn có 2 nghiệm phân biệt. Do đó Δ luôn cắt (P) tại hai điểm A, D phân biệt.

Giả sử $A(a; 4 - 2a), D(d; 4 - 2d)$. Khi đó a, d là các nghiệm của phương trình $x^2 - 6x + 4 = 0$, cho $a = 3 + \sqrt{5}$, $d = 3 - \sqrt{5}$.

Ta có $AD = \sqrt{(d - a)^2 + (2d - 2a)^2} = |d - a|\sqrt{5}$ mà $|a - d| = 2\sqrt{5}$ nên AD = 10.

Gọi I là trung điểm đoạn AD. Khi đó $\begin{cases} x_I = \dfrac{a+d}{2} = 3 \\ y_I = 4 - 2x_I = -2 \end{cases} \Rightarrow I(3;-2)$

Vậy phương trình đường tròn đường kính AD là

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 100.$$

3.170. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có tâm $I\left(\dfrac{1}{2};0\right)$, phương trình đường thẳng AB là $x - 2y + 2 = 0$ và $AB = 2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết rằng đỉnh A có hoành độ âm.

(Trích đề thi TSĐH khối B – 2002)

Hướng dẫn giải

Khoảng cách từ I đến đường thẳng AB bằng $\dfrac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow AD = \sqrt{5}$ và $IA = IB = \dfrac{5}{2}$.

Do đó A, B là các giao điểm của đường thẳng AB với đường tròn tâm I và bán kính $R = \dfrac{5}{2}$. Vậy toạ độ A, B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = \dfrac{25}{4} \end{cases}$$

Giải hệ ta được A(−2; 0), B(2; 2) (vì $x_A < 0$) $\Rightarrow$ C(3; 0), D(−1 ; −2).

3.171. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC có AB = AC, $\widehat{BAC} = 90^0$. Biết $M(1;-1)$ là trung điểm của BC, $G\left(\dfrac{2}{3};0\right)$ là trọng tâm tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

(Trích đề thi TSĐH khối B – 2003)

Hướng dẫn giải

Vì G là trọng tâm ΔABC và M là trung điểm BC nên

$$\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MG} = (-1;3) \Rightarrow A(0;2)$$

Phương trình BC qua M(1 ; −1) và vuông góc $\overrightarrow{MA} = (-1;3)$ là

$$-1(x-1) + 3(y+1) = 0 \Leftrightarrow -x + 3y + 4 = 0. \quad (1)$$

Ta thấy $MB = MC = MA = \sqrt{10} \Rightarrow$ toạ độ B, C thoả mãn phương trình

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 10. \quad (2)$$

Giải hệ (1) và (2) ta được toạ độ b, C là (4 ; 0), (−2 ; −2).

3.172. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường thẳng

$$d_1 : x - y = 0,\ d_2 : 2x + y - 1 = 0.$$

Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết rằng đỉnh A thuộc d_1, đỉnh C thuộc d_2 và các đỉnh B, D thuộc trục hoành.

(Trích đề thi TSĐH khối A – 2005)

Hướng dẫn giải

Vì $A \in d_1 \Rightarrow A(t\,;\,t)$. A và C đối xứng qua BD và B, $D \in Ox$ nên $C(t\,;\,-t)$

Vì $C \in d_2$ nên $2t - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Vậy A(1 ; 1), C(1 ; −1).

Trung điểm AC là I(1 ; 0). Vì I là tâm của hình vuông nên $\begin{cases} IB = IA = 1 \\ ID = IA = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} B \in Ox \\ D \in Ox \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B(b;0) \\ D(d;0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |b-1| = 1 \\ |d-1| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0,\ b = 2 \\ d = 0,\ d = 2 \end{cases}$$

Vậy bốn đỉnh của hình vuông là A(1; 1), B(0; 0), C(1; −1), D(2; 0)

Hoặc A(1 ; 1), B(2 ; 0), C(1 ; −1), D(0 ; 0).

3.173. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có các đỉnh $A(-1;0), B(4;0), C(0;m)$ với $m \neq 0$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC theo m. Xác định m để tam giác GAB vuông tại G.

(Trích đề thi TSĐH khối D – 2004)

Hướng dẫn giải

Trọng tâm G của ΔABC có toạ độ $G(1;\dfrac{m}{3})$.

ΔGBC vuông tại $G \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = 0$

Mà $\overrightarrow{GA} = (-2;-\dfrac{m}{3}), \overrightarrow{GB} = (3;-\dfrac{m}{3})$ nên

$$\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = 0 \Leftrightarrow -6 + \frac{m^2}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3\sqrt{6}.$$

3.174. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm I(6; 2) là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Điểm M(1; 5) thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng $d : x + y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AB.

(Trích đề thi TSĐH khối A – 2009)

Hướng dẫn giải

Gọi N đối xứng với M qua I, suy ra N(11 ;−1) và N thuộc CD.

$E \in \Delta \Rightarrow E(x\,;\,5-x)$; $\overrightarrow{IE} = (x-3;3-x), \overrightarrow{NE} = (x-11;6-x)$

E là trung điểm CD $\Rightarrow$ IE ⊥ EN.

$$\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{EN} = 0 \Leftrightarrow (x-6)(x-11) + (3-x)(6-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = 7 \end{array}\right.$$

* $x = 6 \Rightarrow \overrightarrow{IE} = (0;-3)$, phương trình AB là $y - 5 = 0$.

* $x = 7 \Rightarrow \overrightarrow{IE} = (1;-4)$, phương trình AB là $x - 4y + 19 = 0$.

3.175. cho hai đường thẳng $d_1 : \sqrt{3}x + y = 0$ và $d_2 : \sqrt{3}x - y = 0$. Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với d₁ tại A, cắt d₂ tại hai điểm B và C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của (T), biết tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

(Trích đề thi TSĐH khối A – 2010)

Hướng dẫn giải

d₁ và d₂ cắt nhau tại O, $\cos(d_1;d_2) = \frac{|\sqrt{3}.\sqrt{3} - 1.1|}{\sqrt{3+1}.\sqrt{3+1}} = \frac{1}{2}$ và ΔOAB vuông tại B,

do đó $\widehat{AOB} = 60^o \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^o$

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{4}(OA\sin 60^o)(OA\tan 60^o) = \frac{3\sqrt{3}}{8}OA^2$

Do đó $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OA^2 = \frac{4}{3}$

Toạ độ A(x ; y) với x > 0, thoả mãn hệ $\begin{cases} \sqrt{3}x + y = 0 \\ x^2 + y^2 = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-1\right)$

Đường thẳng AC qua A và vuông góc d_2, suy ra AC có phương trình

$\sqrt{3}x - 3y - 4 = 0$.

Toạ độ C(x ; y) thoả mãn hệ $\begin{cases} \sqrt{3}x - y = 0 \\ \sqrt{3}x - 3y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{-2}{\sqrt{3}};-2\right)$

Đường tròn (T) có đường kính AC, suy ra tâm của (T) là $I\left(\frac{-1}{2\sqrt{3}};-\frac{3}{2}\right)$

Và bán kính IA = 1. Phương trình (T) là $\left(x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 1$.

3.176. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh B(−1; 4), trọng tâm G(1 ; 1) và đường thẳng chứa phân giác trong góc A có phương trình $x - y - 1 = 0$. Tìm toạ độ các đỉnh A, C

(Trích đề thi TSĐH khối D – 2011)

Hướng dẫn giải

Gọi D(x ; y) là trung điểm AC, ta có :

$\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{GD} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 = 3(x-1) \\ y - 1 = 3(y-1) \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{7}{2};1\right)$

Gọi E(x; y) là điểm đối xứng của B qua phân giác trong d: $x - y - 1 = 0$ của góc A.

Ta có EB vuông góc với d và trung điểm của EB thuộc d nên toạ độ E là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 1(x+4) + 1(y-1) = 0 \\ \frac{x-4}{2} - \frac{y+1}{2} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ x - y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow E(2;-5).$$

Đường thẳng AC qua D và E, có phương trình $4x - y - 13 = 0$.

Toạ độ A(x; y) thoả mãn hệ $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 4x - y - 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(4;3)$.

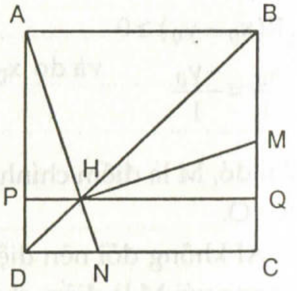
Suy ra C(3;−1).

3.177. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho CN = 2ND. Giả sử $M\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng AN có phương trình $2x - y - 3 = 0$. Tìm toạ độ điểm A.

(Trích đề thi TSĐH khối A, A1–2012)

Hướng dẫn giải

Gọi H là giao điểm của AN và BD. Kẻ đường thẳng qua H và song với AB, cắt AD, BC lần lượt tại P và Q. Đặt HP = x. Suy ra PD = x, AP = 3x và HQ = 3x. Ta có QC = x nên MQ = x. Do đó ΔAHP = ΔHMQ, suy ra $AH \perp HM$. Hơn nữa, ta cũng có AH = HM.



Do đó $AM = MH\sqrt{2} = \sqrt{2}(M;AN) = \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

$A \in AN$, suy ra A(t ; 2t−3).

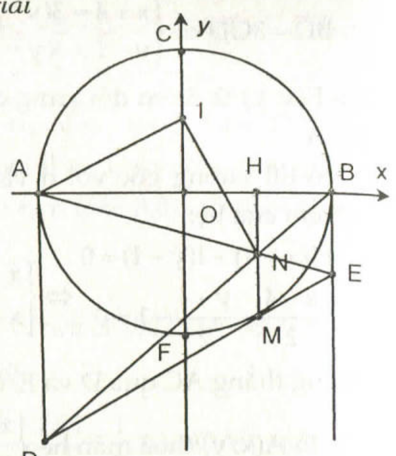
$MA = \frac{3\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2t - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{45}{2}$

$\Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 4$.

Vậy A(1; −1) hoặc A(4; 5).

3.178*. Cho đường tròn (O) có đường kính AB = 2R, OC là một bán kính của đường tròn vuông góc với AB và I là trung điểm OC, M là điểm di động trên đường tròn (O). Tiếp tuyến tại M của (O) cắt các tiếp tuyến của (O) tại A, B lần lượt tại D và E; AE cắt BD tại N. Xác định vị trí điểm M trên (O) để tam giác NIA có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn giải



Vì AD//BE nên theo định lí Ta-let

Ta có $\frac{EN}{NA}=\frac{BE}{AD}=\frac{EM}{MD}$

(do BE = ME và AD =MD) nên MN//AD.

Do đó : MN vuông góc với AB.

Gọi H là giao điểm của MN và AB.

Theo định lí Ta-let, ta có:

$\frac{HN}{AD}=\frac{BN}{BD}$ và $\frac{MN}{AD}=\frac{BN}{BD}$

do đó $\frac{MN}{AD}=\frac{HN}{AD}\Rightarrow MN=HN$

hay N là trung điểm của HM.

Xét hệ trục Oxy trong đó AB nằm trên trục Ox và OC nằm trên trục Oy. Giả sử B(R;0) và C(0;R). Khi đó ta có : A(-R;0) và I(0; $\frac{R}{2}$). Phương trình đường thẳng AI là : $\frac{x}{-R}+\frac{2y}{R}=1$ hay $x-2y+R=0$.

Giả sử $M(x_0;y_0)$. Ta có $x_0^2+y_0^2=R^2$. Vì N là trung điểm của MH nên $N(x_0;\frac{y_0}{2})$. Đặt h là khoảng cách từ N đến đường thẳng AI. Ta có :

$$h=\frac{|x_0-y_0+R|}{\sqrt{5}}\le\frac{|x_0-y_0|+R}{\sqrt{5}}\le\frac{\sqrt{2(x_0^2+y_0^2)}+R}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2R^2}+R}{\sqrt{5}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}R(x_0-y_0)\ge 0\\ \frac{x_0}{1}=\frac{-y_0}{1}\end{cases}\text{ và do } x_0^2+y_0^2=R^2 \text{ nên ta có }\begin{cases}x_0=\frac{R}{\sqrt{2}}\\ y_0=\frac{-R}{\sqrt{2}}\end{cases}.$$

Khi đó, M là điểm chính giữa của cung nhỏ BF với F là điểm đối xứng với C qua O.

Vì AI không đổi nên diện tích tam giác NIA lớn nhất khi h lớn nhất, tương đương với M là điểm chính giữa của cung nhỏ BF.

Mục lục

Chương 1: **VECTO**

§1. KHÁI NIỆM VECTO 3
§2. TỔNG CỦA HAI VECTƠ 7
§3. HIỆU CỦA HAI VECTO 13
§4. PHÉP NHÂN VECTO VỚI MỘT SỐ 19
§5. TRỤC TOẠ ĐỘ VÀ HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ 34
§6. BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG I 43

Chương 2: **TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG**

§1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KÌ 50
§2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO 55
§3. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC 83
§4. BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG II 111

Chương 3: **PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘTRONG MẶT PHẲNG**

§1. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT, PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG 122
§2. KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC 155
§3. ĐƯỜNG TRÒN 174
§4. ĐƯỜNG ELIP 204
§5. ĐƯỜNG HYPEBOL 224
§6. ĐƯỜNG PARABOL 237
§7. BA ĐƯỜNG CÔNIC 247
§8. BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG III 252